Lateralbewegungen am Einspurmodell

Das Einspurmodell ist eines der einfachsten Modelle zur Untersuchung der Lateraldynamik. Dem Einspurmodell liegen folgende Modellannahmen zugrunde

- Fahrzeugbreite geht gegen Null
- keine Hub-, Roll- oder Nickbewegungen
- konstante Geschwindigkeit
- masselose Räder
- kleiner Schlupf und damit vom Schräglaufwinkel linear abhängige Reifenkräfte
- alle Winkel werden als klein betrachtet (geometrische Linearisierung)

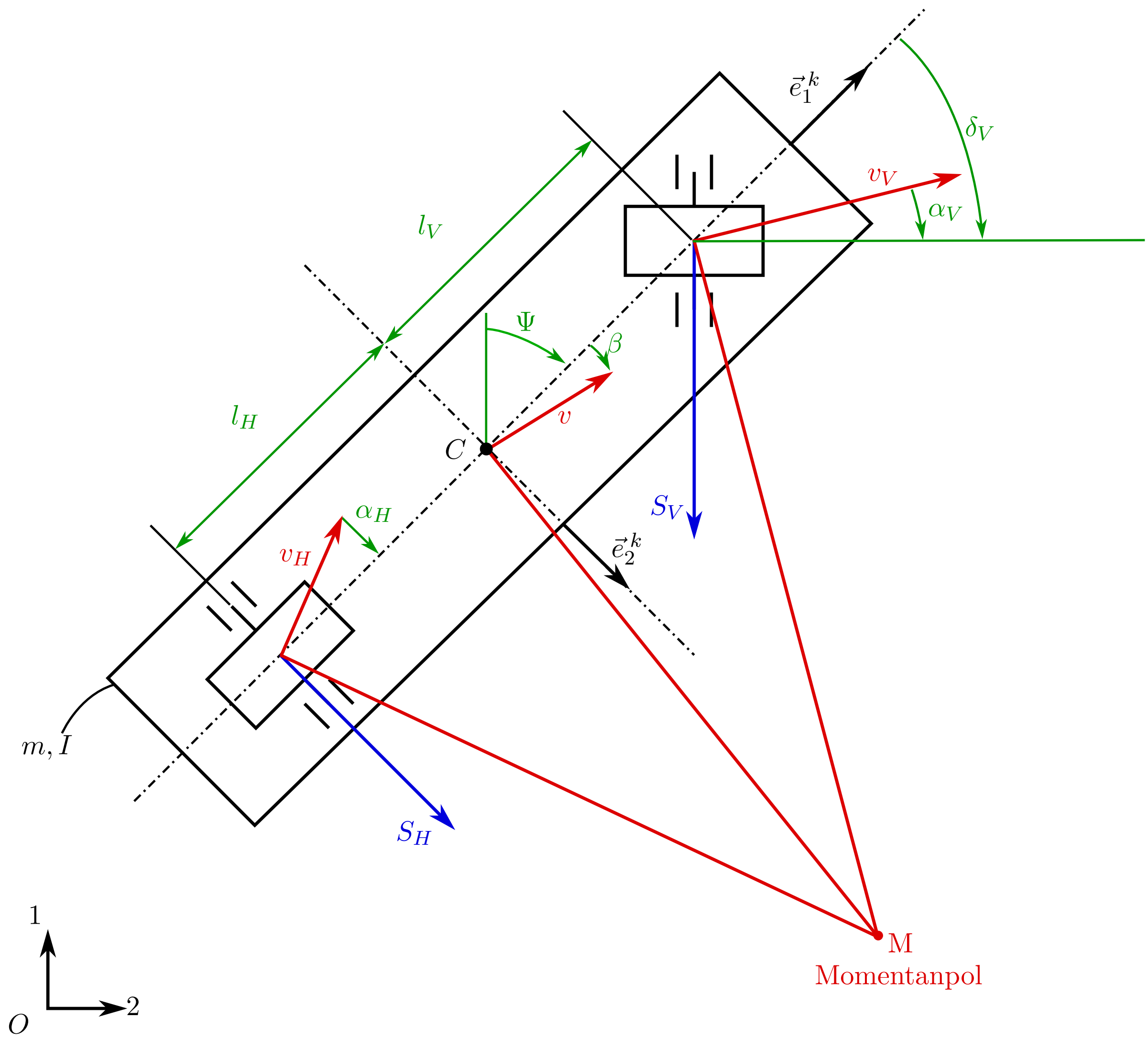

Abbildung 1: Einspurmodell

In Abbildung 1 bezeichnen δ_V den Spurwinkel, Ψ den Gierwinkel, β den Schwimmwinkel und $\alpha_{V,H}$ die Schräglaufwinkel an der Vorder- bzw. Hinterachse.

Es wird die ebene Bewegung des Fahrzeugs mit $v = \text{const}$ um den Momentanpol M untersucht. Damit besitzt das Fahrzeug $f = 2$ Freiheitsgrade. Als verallgemeinerte Koordinaten werden der Gierwinkel

Ψ und der Schwimmwinkel β gewählt. Im fahrzeugfesten System $\{C, \vec{e}_1^{\,k}, \vec{e}_2^{\,k}\}$ folgen die kinematischen Größen zu

Geschwindigkeiten

$$v_1 = v\cos\beta \tag{1}$$
$$v_2 = v\sin\beta \tag{2}$$
$$\omega_3 = \dot{\Psi} \tag{3}$$

Beschleunigungen

$$\overset{*}{v}_2 = \dot{v}\sin\beta + v\dot{\beta}\cos\beta + \dot{\Psi}v\cos\beta \approx v(\dot{\beta} + \dot{\Psi}) \tag{4}$$
$$\overset{*}{\omega}_3 = \ddot{\Psi} \tag{5}$$

Darin bezeichnet $\overset{*}{v}_2$ die Ableitungen im Inertialsystem, mit $\overset{*}{v}_2 = \dot{v}_2 + \omega \times v_2$.

Schräglaufwinkel

Unter der Annahme von kleinen Schräglaufwinkeln $\alpha_{V,H} \ll 1$ folgen aus geometrischen Zusammenhängen, vgl. Abbildung 1

$$v_{2V} = v\beta + l_V\dot{\Psi} = (\delta_V - \alpha_V)\,v \tag{6}$$
$$v_{2H} = v\beta - l_H\dot{\Psi} = -\alpha_H v. \tag{7}$$

Und die Schräglaufwinkel ergeben sich zu

$$\alpha_V = \delta_V - \beta - \frac{l_V}{v}\dot{\Psi} \tag{8}$$
$$\alpha_H = -\beta + \frac{l_H}{v}\dot{\Psi}. \tag{9}$$

Reifenkräfte

Für kleine Schräglaufwinkeln $\alpha_{V,H} \ll 1$ hängen die Reifenkräfte linear von den Schräglaufwinkeln ab

$$S_V = c_{\alpha V}\alpha_V \tag{10}$$
$$S_H = c_{\alpha H}\alpha_H. \tag{11}$$

Bewegungsgleichungen

Mit den obigen Gleichungen können die Grundgleichungen des Einspurmodells formuliert werden

$$m v\left(\dot{\beta}+\dot{\Psi}\right)=S_V+S_H=c_{\alpha V}\left(\delta_V-\beta-\frac{l_V \dot{\Psi}}{v}\right)+c_{\alpha H}\left(-\beta+\frac{l_H \dot{\Psi}}{v}\right) \tag{12}$$

$$I \ddot{\Psi}=S_V l_V-S_H l_H=c_{\alpha V}\left(\delta_V-\beta-\frac{l_V \dot{\Psi}}{v}\right) l_V+c_{\alpha H}\left(-\beta+\frac{l_H \dot{\Psi}}{v}\right) l_H \tag{13}$$

und daraus folgen die Bewegungsgleichungen des Einspurmodells zu

$$\boxed{\begin{aligned} m v \dot{\beta}+\left(c_{\alpha V}+c_{\alpha H}\right) \beta+\left(m v+\frac{c_{\alpha_V} l_V-c_{\alpha_H} l_H}{v}\right) \dot{\Psi}&=c_{\alpha V} \delta_V & (14)\\ I \ddot{\Psi}+\left(\frac{c_{\alpha V} l_V^2+c_{\alpha H} l_H^2}{v}\right) \dot{\Psi}+\left(c_{\alpha V} l_V-c_{\alpha H} l_H\right) \beta&=c_{\alpha V} l_V \delta_V \quad . & (15)\end{aligned}}$$

Stationäre Kreisfahrt

Für eine stationäre Kreisfahrt mit Radius R und konstanter Geschwindigkeit v ergibt sich eine Bewegung mit konstanter Gierrate und konstantem Schwimmwinkel

$$\dot{\Psi} = \frac{v}{R}=\text{const}, \ddot{\Psi}=0 \tag{16}$$

$$\beta = \text{const}, \dot{\beta}=0 \tag{17}$$

Mit der Bewegungsgleichung folgt daraus der Schwimmwinkel zu

$$\boxed{\beta=\frac{l_H}{R}-\frac{l_V m v^2}{c_{\alpha H} R\left(l_V+l_H\right)}} \tag{18}$$

Damit folgt der Spurwinkel δ_V zu

$$\boxed{\delta_V=\frac{l_V+l_H}{R}+\frac{c_{\alpha H} l_H-c_{\alpha H} l_V}{c_{\alpha V} c_{\alpha H}\left(l_V+l_H\right)} m \frac{v^2}{R}=\delta_A+g_e a_z .} \tag{19}$$

Der Spurwinkel setzt sich also aus dem Ackermannwinkel

$$\delta_A=\frac{l_V+l_H}{R}, \tag{20}$$

dem Eigenlenkgradient

$$g_e=\frac{c_{\alpha H} l_H-c_{\alpha H} l_V}{c_{\alpha V} c_{\alpha H}\left(l_V+l_H\right)} m \tag{21}$$

und der Zentripetalbeschleunigung

$$a_z=\frac{v^2}{R} \tag{22}$$

zusammen.

Der Spurwinkel setzt sich also aus einem rein geometrischen und streng positiven Anteil des Ackermannwinkels zusammen, sowie aus der von dem Radius und der Geschwindigkeit der Kreisfahrt abhängigen

Zentripetalbeschleunigung zusammen, deren Anteil sich aus dem Eigenlenkgradienten bestimmt. Der Eigenlenkgradient ist abhängig von der Geometrie des Fahrzeugs und den Kontaktverhältnissen zwischen Reifen und Straße. Je nach Verteilung kann der Eigenlenkgradient größer, gleich oder kleiner als Null sein.

Es ergeben sich folgende Zustände

- $g_e > 0$: untersteuernd
  Für eine Kreisfahrt mit konstantem Radius muss für höhere Geschwindigkeiten der Lenk- bzw. Spurwinkel steigen. Dasselbe gilt für Kreisfahrten mit konstanter Geschwindigkeit und kleiner werdendem Radius. Dieses Fahrverhalten wird als untersteuernd bezeichnet.

- $g_e = 0$: neutral
  Eine Änderung des Radius oder der Geschwindigkeit ändert am Lenk- bzw. Spurwinkel nichts. Dieses Fahrverhalten wird als neutral bezeichnet.

- $g_e < 0$: übersteuernd
  Für eine Kreisfahrt mit konstantem Radius muss für höhere Geschwindigkeiten der Lenk- bzw. Spurwinkel sinken. Dasselbe gilt für Kreisfahrten mit konstanter Geschwindigkeit und kleiner werdendem Radius. Dieses Fahrverhalten wird als übersteuernd bezeichnet.

Fahrstabilität

Für eine Geradeausfahrt folgt aus der Bewegungsgleichung mit $\delta_V = 0$ eine homogene Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = Ax, \text{ mit } x = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \text{ und } A = \begin{bmatrix} -\frac{c_{\alpha V}+c_{\alpha H}}{mv} & -1-\frac{c_{\alpha V}l_V-c_{\alpha H}l_H}{mv^2} \\ -\frac{c_{\alpha V}l_V-c_{\alpha H}l_H}{I} & -\frac{c_{\alpha V}l_V^2+c_{\alpha H}l_H^2}{Iv} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Entsprechend der linearen Systemtheorie ist dieses System stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix A negativen Realteil aufweisen. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \text{ mit} \tag{24}$$

$$a_1 = \frac{c_{\alpha V} + c_{\alpha H}}{mv} + \frac{c_{\alpha V}l_V^2 + c_{\alpha H}l_H^2}{I_v} > 0 \tag{25}$$

$$a_2 = \frac{c_{\alpha V}c_{\alpha H}\left(l_V + l_H\right)^2}{Imv^2}\left(1 + \frac{c_{\alpha H}l_H - c_{\alpha V}l_V}{c_{\alpha V}c_{\alpha H}\left(l_V + l_H\right)^2}mv^2\right) > 0. \tag{26}$$

Die Realteile aller Eigenwerte sind genau dann negativ und damit das System stabil, wenn $a_1 > 0$ und $a_2 > 0$. Aus Gleichung (25) folgt, dass $a_1 > 0$ immer erfüllt ist. Aus Gleichung (26) folgt, dass a_2 für untersteuernde Fahrzeuge immer garantiert ist, sich für übersteuernde Fahrzeuge sich jedoch eine kritische Geschwindigkeit v_{krit} ergibt,

$$v_{\text{kritisch}}^2 = \frac{1}{m}\frac{c_{\alpha V}c_{\alpha H}\left(l_V + l_H\right)^2}{c_{\alpha V}l_V - c_{\alpha H}l_H}. \tag{27}$$

Untererhalb dieser kritischen Geschwindigkeit sind auch übersteuernde Fahrzeuge stabil, oberhalb verhalten sie sich instabil.