



Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels

Wir betrachten die 2-dimensionale Bewegung eines Doppelpendels, dessen Pendelkörper gleiche Längen l und gleiche Massen m haben. Die Massen werden als Punktmassen angenommen.

Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems beträgt

$$f = \text{-----}$$

Wählt man die Winkel ----- und ----- als verallgemeinerte Koordinaten, so erhält man für den Vektor der verallgemeinerten Koordinaten

$$\mathbf{y} = [\alpha \quad \beta]^T$$

Die Lagevektoren der zwei Punktmassen \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 ergeben sich zu

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_2(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix}$$

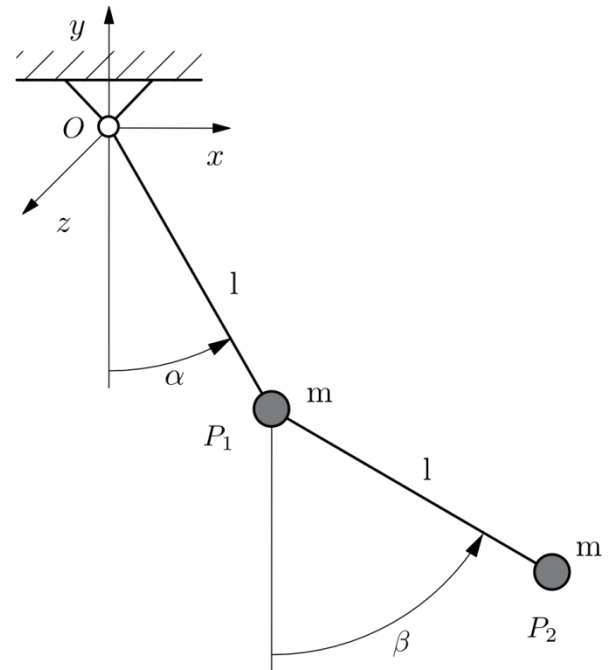
Die zugehörigen Jacobi-Matrizen lauten

$$\mathbf{J}_{T_1} = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{T_2} = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix}$$

und für die lokalen Geschwindigkeiten gilt:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_2 = \text{-----}$$





Für die absoluten Geschwindigkeiten ergibt sich

$$\mathbf{v}_1 = \text{-----} = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \text{-----} = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix}$$

und für die absoluten Beschleunigungen gilt:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix}.$$

Welche Struktur haben die Beschleunigungsterme?

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) = \text{-----} + \text{-----}$$

$$\mathbf{a}_1 = \text{-----} + \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{a}_2 = \text{-----} + \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix} \cdot$$

Unter Berücksichtigung der Kinematik sollen die Bewegungsgleichungen des Doppelpendels in Minimalkoordinaten aufgestellt werden.

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{y}) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{q}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}).$$

Dabei gilt für die globale Massenmatrix

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{J}_{T_i}^T \cdot m_i \cdot \mathbf{J}_{T_i} = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix}.$$

Weiterhin ergibt sich für den Vektor der verallgemeinerten Coriolis- und Zentrifugalkräfte

$$\mathbf{k}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{J}_{T_i}^T \cdot m_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_i = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung der Gravitationskräfte auf die Pendelkörper

$$\mathbf{f}_1^e = [0 \quad -mg \quad 0]^T, \quad \mathbf{f}_2^e = [0 \quad -mg \quad 0]^T,$$

folgt schließlich für den Vektor der verallgemeinerten eingprägten Kräfte

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{J}_{T_i}^T \cdot \mathbf{f}_i^e = \begin{bmatrix} \text{-----} \\ \text{-----} \end{bmatrix}.$$