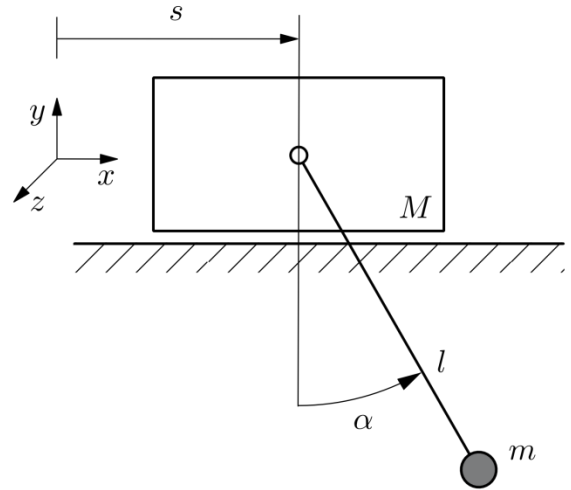




Bewegungsgleichungen mit verallgemeinerten Geschwindigkeiten

Es soll die Bewegungsgleichung eines Portal-
 kranes mittels verallgemeinerter Geschwindig-
 keiten hergeleitet werden.

Der Portalkran kann mit den 3 verallgemeinerten
 Koordinaten $\mathbf{y} = [s \quad l \quad \alpha]^T$ beschreiben werden.



Position des Wagens und der Punktmasse

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit des Wagens und der Punktmasse

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Wahl verallgemeinerter Geschwindigkeiten

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{y}}$$



Geschwindigkeiten des Wagens und der Punktmasse als Funktion von \mathbf{z}

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Beschleunigungen des Wagens und der Punktmasse

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{L}_{T_1} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \widetilde{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{L}_{T_2} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \widetilde{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Unter Berücksichtigung der Kinematik sollen die Bewegungsgleichungen des Portalkrans in Minimalkoordinaten aufgestellt werden.

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{z}} + \widetilde{\mathbf{k}}(\mathbf{t}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \widetilde{\mathbf{q}}(\mathbf{t}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Dabei gilt für die globale Massenmatrix

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{L}_{T_i}^T \cdot m_i \cdot \mathbf{L}_{T_i} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$



Weiterhin ergibt sich für den Vektor der verallgemeinerten Coriolis- und Zentrifugalkräfte

$$\tilde{\mathbf{k}}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{L}_{T_i}^T \cdot m_i \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i = \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right]^T$$

Unter Berücksichtigung der Gravitationskräfte auf die Körper

$$\mathbf{f}_1^e = [0 \quad -Mg \quad 0]^T, \quad \mathbf{f}_2^e = [0 \quad -mg \quad 0]^T,$$

folgt schließlich für den Vektor der verallgemeinerten eingepprägten Kräfte

$$\tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{L}_{T_i}^T \cdot \mathbf{f}_i^e = \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right]^T$$

Die Dynamik des Krans ergibt sich aus der kinematischen Differenzialgleichung und der Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{y}} = \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right]$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right] = \tilde{\mathbf{q}}$$

Zum Vergleich ergibt sich die Bewegungsgleichung ohne Verwendung allgemeiner Geschwindigkeiten zu

$$\begin{bmatrix} M + m & m \sin \alpha & m l \cos \alpha \\ m \sin \alpha & m & 0 \\ m l \cos \alpha & 0 & m l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{l} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - 2 m \dot{l} \dot{\alpha} \cos \alpha \\ m l \dot{\alpha}^2 \\ -2 m l \dot{l} \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m g \cos \alpha \\ -m g l \sin \alpha \end{bmatrix}$$