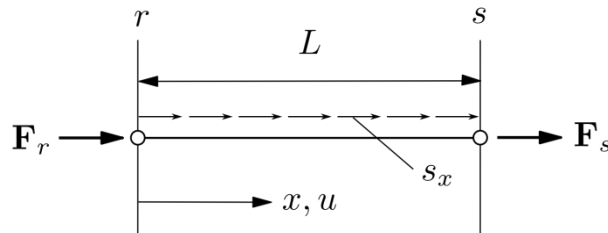


Lokale Bewegungsgleichung eines Stabes

Der eindimensionale Stab mit den Knoten r, s und Knotenverschiebungen q_r, q_s ist eines der einfachsten Elemente in der FEM.

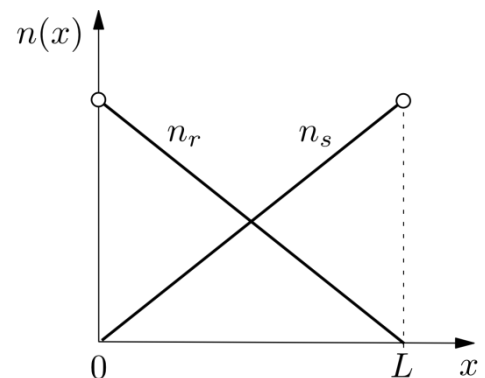


Prinzip von d'Alembert für Stab mit Länge L , konstantem Querschnitt A und E-Modul E :

$$\int_0^L \delta u \rho A \ddot{u} \, dx + \int_0^L \delta \varepsilon_x E A \varepsilon_x \, dx = \int_0^L \delta u s_x \, dx + F_r \delta q_r + F_s \delta q_s$$

Lineare Ansatzfunktion für das Verschiebungsfeld:

$$u(x) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}_j = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right] \cdot \begin{bmatrix} q_r \\ q_s \end{bmatrix}$$



Die Matrix der Verzerrungen \mathbf{B} ergibt sich durch Differentiation der Matrix \mathbf{N} . Somit lautet die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehung:

$$\varepsilon_x(x) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}_j = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} q_r \\ q_s \end{bmatrix}$$



Die lokale Massenmatrix des Stabes lautet:

$$\mathbf{M}_e = \int_0^L \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} dx = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} dx$$
$$= \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} dx = \text{---} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

Die lokale Steifigkeitsmatrix des Stabes mit dem Materialgesetz $\sigma = E\varepsilon$ lautet:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot E \cdot \mathbf{B} dx = \text{---} \int_0^L \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} dx$$
$$= \text{---} \int_0^L \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} dx = \text{---} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$



Der Vektor der Kräfte aus der Streckenlast lautet:

$$\mathbf{f}_{e,v} = s_x \int_0^L \mathbf{N}^T dx = \text{---} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

Der Vektor der Kräfte aus den Randlasten lautet:

$$\mathbf{f}_{e,s} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

Somit ist die lokale Bewegungsgleichung des Stabelements in Elementkoordinaten:

$$\text{---} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] + \text{---} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$