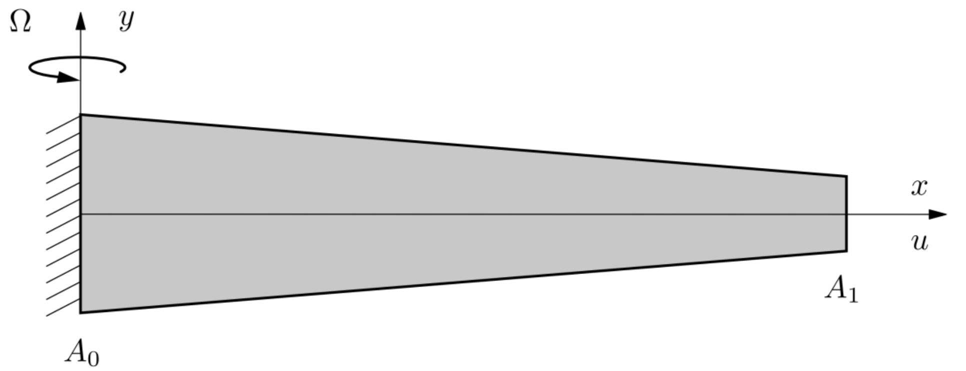
Praktikum Technische Dynamik
Stationäre Analyse eines Rotorblattes

____
(Name, Vorname)

Korrektur

____
(Matrikel–Nummer)

Das Rotorblatt eines Helikopters der Länge L rotiert mit der Rotationsgeschwindigkeit Ω um die y-Achse.



Das homogene Rotorblatt hat den Querschnitt $A(x)$ der sich linear von A_0 an der Einspannung bis auf $A_1 = \frac{1}{2} A_0$ an der Spitze verkleinert $A(x) = A_0 + (A_1 - A_0)\frac{x}{L}$. Durch die Rotation um die y-Achse erfährt das Rotorblatt aus der Zentrifugalkraft eine axiale Streckenlast $p(x) = \rho A(x)\Omega^2 x$. Die gesamte potentielle Energie für dieses Problem beträgt $\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EA(x)\varepsilon^2\,dx - \int_0^L pu\,dx$, wobei E der E-Modul und $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ die axiale Dehnung ist.

Unter Annahme eines quasi-statischen Zustandes lautet die exakte Lösung des Problems für die Verschiebung $u(x)$

$$u(x)\frac{E}{\rho L^3\Omega^2} = \frac{1}{3}\left(2\eta + \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3} + 2\ln\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)\right),$$

und für die axiale Kraft $F(x) = \varepsilon EA(x)$

$$\frac{F(x)}{\rho A_0 L^2\Omega^2} = \frac{1}{3} - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{6},$$

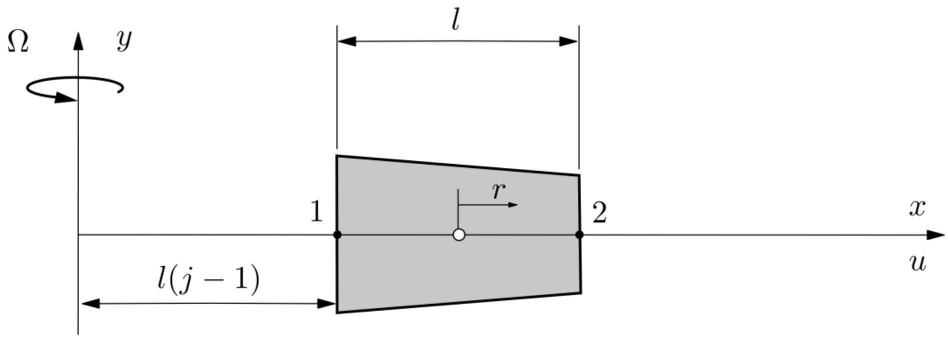
wobei $\eta = \frac{x}{L}$.

Mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode soll unter Verwendung der Symbolic Toolbox von Matlab eine Näherungslösung für das quasi-statische Verhalten des Rotorblattes gefunden werden. Dazu werden zwei-knotige Stabelemente mit linearen Ansatzfunktionen verwendet. Für das Verschiebungsfeld eines Elementes gilt

$$\mathrm{u(r)} = \mathrm{n}_1\mathrm{(r)}\,\mathrm{q}_1 + \mathrm{n}_2\mathrm{(r)}\,\mathrm{q}_2,$$

wobei $\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2$ die Knotenverschiebungen sind.

Die dimensionslose Positionsvariable entlang der Achse eines Elements ist $\mathrm{r} \in [-1, 1]$. Die Formfunktionen lauten $\mathrm{n}_1\mathrm{(r)} = \frac{1}{2}(1-\mathrm{r})$ und $\mathrm{n}_2\mathrm{(r)} = \frac{1}{2}(1+\mathrm{r})$. Die Umrechnung zwischen den lokalen und globalen Koordinaten des j-ten Elements ist durch die Beziehung $\mathrm{x} = \mathrm{l\,j} + \frac{1}{2}\mathrm{l(r-1)},\ \mathrm{l} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{n}}$ gegeben.



a.) Bestimmen Sie die Verschiebung in einem Element in Abhängigkeit der Positionsvariable r und den Knotenkoordinaten q_1 und q_2 an.

$$\mathrm{u(r)} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

b.) Wir lautet die Dehnung im Element? (Kettenregel beachten!)

$$\varepsilon = \frac{\partial \mathrm{u(r(x))}}{\partial \mathrm{r}} \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dx}} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

c.) Bestimmen Sie die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^j$ für das j-te Elemente.

$$\mathbf{K}^j = \int_V \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dV = \int_{-1}^{1} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dr$$

$$= \frac{}{} \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

d.) Bestimmen Sie den Vektor der eingeprägten Kräfte f^j für das j-te Element.

$$\mathbf{f}^j = \int_{l(j-1)}^{l \cdot j} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dx = \int_{-1}^{1} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dr$$

$$= \frac{}{} \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

e.) Geben Sie die Randbedingung am ersten Knoten für das FE Modell des Rotorblattes an.

$$q_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

f.) Bestimmen Sie die FE-Gleichungssysteme für das Rotorblatt bei Diskretisierungen von 1 bis 10 Elementen und führen Sie für alle 10 Diskretisierungen folgende Auswertungen durch (nutzen Sie normierte Größen, z.B. $\frac{x}{L}$, $u \frac{E}{\rho L^3 \Omega^2}$, $F \, \frac{1}{\dots}$):

- Stellen Sie die axiale Verschiebung der exakten Lösung und aller FE-Lösungen dar.
- Stellen Sie die axiale Kraft der exakten Lösung und aller FE-Lösungen dar.
- Tragen Sie die Verschiebung der Spitze des Rotorblattes über der Anzahl der verwendeten Elemente auf. (Verwenden Sie das Verhältnis zur Referenzlösung)
- Tragen Sie die axiale Kraft an der Einspannung über der Anzahl der verwendeten Elemente auf. (Verwenden Sie das Verhältnis zur Referenzlösung)
- Was fällt auf?