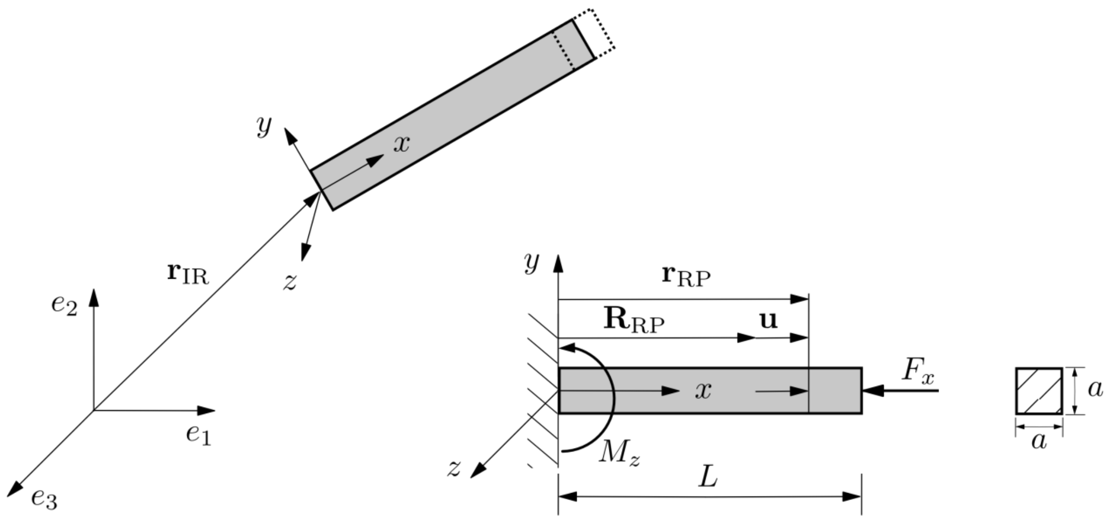
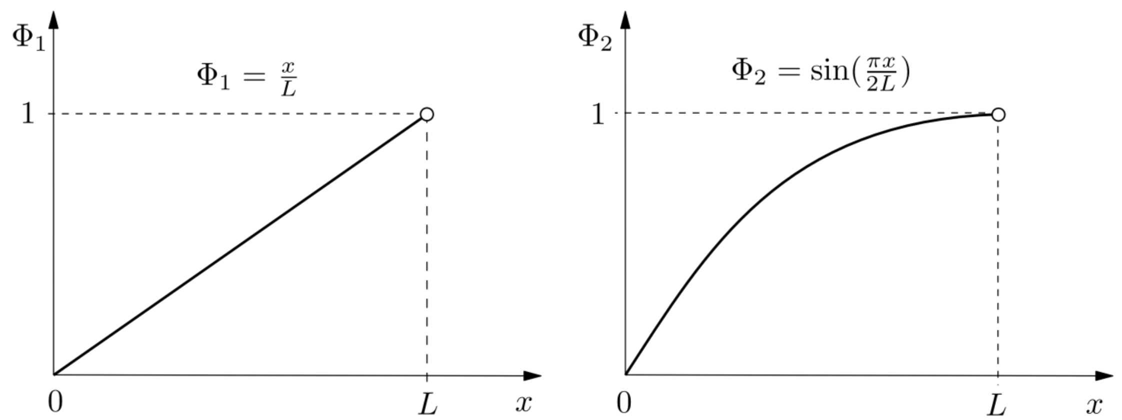
Bewegungsgleichungen eines elastischen Stabs

Die Bewegungsgleichung eines freien elastischen Stabs (Länge L, Querschnitt $A = a^2$, Elastizitätsmodul E, Masse $m = \rho_0 AL$) soll hergeleitet werden. Aufgrund der auftretenden Belastungen kann angenommen werden, dass der Stab nur in Längsrichtung elastische Verformungen zeigt und in Querrichtung als starr angesehen werden kann.



Globale Ansatzfunktionen für Längsverschiebung: $u(x) = \Phi_1(x)q_1 + \Phi_2(x)q_2$



a.) Geben Sie die Position eines Punktes P des Balkens im Referenzsystem an.

$$\mathbf{r}_{RP} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{RP_x} \\ \mathbf{r}_{RP_y} \\ \mathbf{r}_{RP_z} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{RP} + \mathbf{\Phi}_P \cdot \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

b.) Bestimmen Sie die Komponenten der Massenmatrix.

Masse des Körpers: $m\mathbf{E} = \int_{\Omega_0} \mathbf{E}\, dm = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

Trägheitstensor: $\mathbf{I}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T\, dm = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} dm$

$I_{xx} = \int_{\Omega_0} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dm = \rho_0 \int_{\_\_}^{\_\_} \int_{\_\_}^{\_\_} \int_{\_\_}^{\_\_} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dx\, dy\, dz$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$I_{yy} = I_{zz} = \int_{\Omega_0} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dm = \rho_0 \int_{\_\_}^{\_\_} \int_{\_\_}^{\_\_} \int_{\_\_}^{\_\_} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dx\, dy\, dz$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Diese Berechnungen lassen sich auch sehr einfach mit der Matlab-Symbolic Toolbox durchführen:

```
I=int(int(int(rRP_tilde*transpose(rRP_tilde)*rho,x,0,L),y,-a/2,a/2),z,-a/2,a/2);
```

Im Falle keiner elastischen Verformungen reduziert sich $I_{yy} = I_{zz}$ zu

$I_{yy} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Schwerpunktlage: $\mathbf{c}(\mathbf{q}) = \frac{1}{m}\int_{\Omega_0} \mathbf{r}_{RP}\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$

Massenmatrix aus elastischem Anteil:

$$\mathbf{M}_e = \int\limits_{\Omega_0} \mathbf{\Phi}_P^T \cdot \mathbf{\Phi}_P\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Kopplungsterme:

$$\mathbf{C}_t = \int\limits_{\Omega_0} \mathbf{\Phi}_P^T\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_r(\mathbf{q}) = \int\limits_{\Omega_0} \mathbf{\Phi}_P^T \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

c.) Bestimmen Sie die von den elastischen Anteilen abhängigen Komponenten des Vektors der Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte.

für den translatorischen Anteil:

$$\dot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

für den rotatorischen Anteil:

$$\mathbf{G}_\mathrm{r}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = 2\int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_\mathrm{RP} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_\mathrm{RP}^\mathrm{T}\,\mathrm{dm}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

für Anteile aus den elastischen Koordinaten:

$$\mathbf{G}_\mathrm{e}(\dot{\mathbf{q}}) = 2\int_{\Omega_0} \mathbf{\Phi}_\mathrm{P}^\mathrm{T} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_\mathrm{RP}^\mathrm{T}\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O}_\mathrm{e}^1(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{\Phi}}_\mathrm{P}^{*1} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_\mathrm{RP}\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O}_\mathrm{e}^2(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{\Phi}}_\mathrm{P}^{*2} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_\mathrm{RP}\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

d.) Geben Sie die Steifigkeitsmatrix an.

$$\mathbf{K}_\mathrm{e} = \int_{\Omega_0} \mathbf{\Phi}_\mathrm{P}'^\mathrm{T} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{\Phi}_\mathrm{P}'\,\mathrm{dV} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

e.) Bestimmen Sie für das Moment $\mathrm{M_z}$ und die Kraft $\mathrm{F_x}$ den Vektor der Oberflächenkräfte.

$$\mathbf{h}_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{RP_k}} \\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{P_k}}^\mathrm{T} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{P_k}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{\Psi}_{\mathrm{P_k}}^\mathrm{T} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{l}_{\mathrm{P_k}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

f.) Geben Sie die Bewegungsgleichungen des elastischen Stabs unter Verwendung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit des Referenzsystems $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IR}} = [\omega_{\mathrm{IR_1}} \quad \omega_{\mathrm{IR_2}} \quad \omega_{\mathrm{IR_3}}]^\mathrm{T}$ an.