



Nichtholonome Bindungen

Geometrische Bindungen:

Beziehung zwischen Lagegrößen
reduziert Freiheitsgrad der Lage und der Geschwindigkeit
Annahme:

alle geometrischen Bindungen sind im Lagevektor enthalten: $y = (y_1, \dots, y_f) \in \mathbb{R}^{\bar{f}}$

Kinematische Bindungen:

Beziehung zwischen Geschwindigkeitsgrößen
reduziert zunächst nur Freiheitsgrad der Geschwindigkeit

implizit: Beschreibung der Einschränkung von k Bewegungsrichtungen

$$A \cdot \dot{y} = \begin{bmatrix} a_1^T(y) \\ \vdots \\ a_k^T(y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{\bar{f}} \end{bmatrix} = 0$$

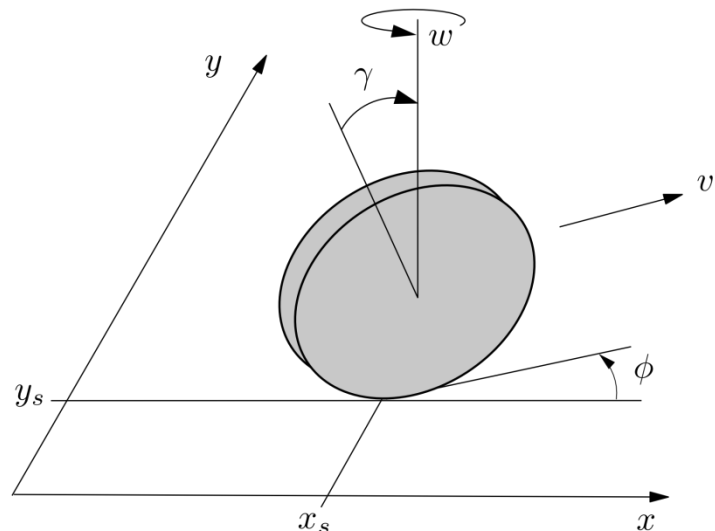
explizit: Beschreibung der $\bar{f} - k$ freien Bewegungsrichtungen

$$\dot{y} = G \cdot z = [g_1(y) \quad \dots \quad g_{\bar{f}-k}(y)] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{\bar{f}-k} \end{bmatrix}$$

Zusammenhang: $A \cdot \dot{y} = A \cdot G \cdot z = 0, \forall z \Rightarrow A \cdot G = 0$

Beispiel: rollendes Rad

$\bar{f} = 4, y = (x_s, y_s, \theta, \gamma)$





Integrierbarkeit kinematischer Bindungen:

einzelne Bindung:

$$a_1(y) \cdot \dot{y} = 0, \text{ und } \dot{y} = G \cdot z = [g_1(y) \quad \dots \quad g_{\bar{f}-k}(y)] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{\bar{f}-k} \end{bmatrix}$$

Eine kinematische Bindung ist integrierbar, falls eine entsprechende geometrische Bindung existiert:

$$c(y) = 0 \Rightarrow \dot{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial c}{\partial y_{\bar{f}}} \end{bmatrix}}_{a_1(y)} \cdot \dot{y} = 0$$

$$a_1(y) \cdot \dot{y} = 0 \text{ integrierbar falls } \frac{\partial a_i}{\partial y_j} = \frac{\partial a_j}{\partial y_i} \quad \forall i, j \text{ erfüllt}$$

(Integrabilitätsbedingung)

integrierbar:

Reduziert Freiheitsgrad der Lage und Geschwindigkeit $f = \bar{f} - 1$
(holonome Bindung)

nicht integrierbar:

Freiheitsgrad der Lage wird nicht reduziert $f = \bar{f}$
Freiheitsgrad der Geschwindigkeit wird reduziert $g = \bar{f} - 1$
(nichtholonome Bindung)

mehrere Bindungen:

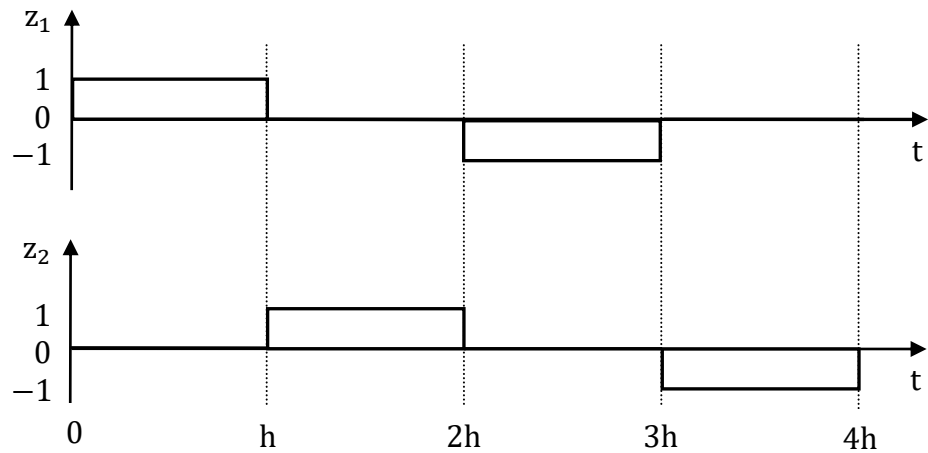
Die Gesamtheit der kinematischen Bindungen muss betrachtet werden.
Dazu ist eine alternative Betrachtung nichtholonomer Bindungen hilfreich:
durch Kombination der $g = \bar{f} - k$ freien Geschwindigkeiten
sind Lageänderungen in den kinematisch gesperrten Richtungen möglich.

$$\dot{y} = G \cdot z = \sum_{i=1}^g g_i(y) z_i \text{ linear unabhängig von } g_i$$



Überlegung für $g = 2$ $\dot{y} = \mathbf{g}_1(y) z_1 + \mathbf{g}_2(y) z_2$

Schalt-
reihenfolge:



Differentialgleichung: $\dot{y} = \mathbf{g}_1(y)$ $\dot{y} = \mathbf{g}_2(y)$ $\dot{y} = -\mathbf{g}_1(y)$ $\dot{y} = -\mathbf{g}_2(y)$
 Fluss: $\phi_t^{\mathbf{g}_1}$ $\phi_t^{\mathbf{g}_2}$ $\phi_t^{-\mathbf{g}_1}$ $\phi_t^{-\mathbf{g}_2}$

Lageänderung für

$t = h$ $\mathbf{y}(h) = \mathbf{y}_1 = \phi_h^{\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_0)$
 $t = 2h$ $\mathbf{y}(2h) = \mathbf{y}_2 = \phi_h^{\mathbf{g}_2}(\mathbf{y}_1) = \phi_h^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_0)$
 $t = 3h$ $\mathbf{y}(3h) = \mathbf{y}_3 = \phi_h^{-\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_2) = \phi_h^{-\mathbf{g}_1} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_0)$
 $t = 4h$ $\mathbf{y}(4h) = \mathbf{y}_4 = \phi_h^{-\mathbf{g}_2}(\mathbf{y}_3) = \phi_h^{-\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{-\mathbf{g}_1} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_0)$

Approximation kleiner Lageänderungen über Taylorreihe 2. Ordnung

$0 \leq t \leq h, \quad \dot{y} = \mathbf{g}_1(y), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$

$$\rightarrow \mathbf{y}(t_0 + h) = \mathbf{y}(t_0) + \left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_{t_0} h + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} \right|_{t_0} h^2 + \dots$$

$$\downarrow t_0 = 0 \quad \swarrow \dot{y} = \mathbf{g}_1 \quad \swarrow \dot{y} = \dot{\mathbf{g}}_1 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial y} \dot{y} =: D\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_1 \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2$$



$$h \leq t \leq 2h, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_2(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(h) = \mathbf{y}_1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{y}_2 &\approx \mathbf{y}_1 + \mathbf{g}_{21} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{21} \mathbf{g}_{21} h^2 \\ &\quad \begin{aligned} &\quad \hookrightarrow = \frac{1}{2} D\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2 \\ &\quad \rightarrow = \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \dots) h \approx \left(\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}_0} (\mathbf{g}_{10} h) \right) h \\ &\quad \quad \quad \quad \quad = \mathbf{g}_{20} h + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} h^2 \\ &\quad \rightarrow \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2 \\ &\quad \approx \mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20}) h + \left(\frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} \right) h^2 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$2h \leq t \leq 3h, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}_1(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(2h) = \mathbf{y}_2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{y}_3 &\approx \mathbf{y}_2 - \mathbf{g}_{12} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{12} \mathbf{g}_{12} h^2 \\ &\quad \begin{aligned} &\quad \hookrightarrow = \frac{1}{2} D\mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2 \\ &\quad \rightarrow = -\mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20})h + \dots) h \approx -\mathbf{g}_{10} h - D\mathbf{g}_{10} (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20} h^2) \\ &\quad \approx \mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20}) h + \left(\frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} \right) h^2 \end{aligned} \\ \rightarrow \mathbf{y}_3 &\approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + (D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20}) h^2 \end{aligned}$$

$$3h \leq t \leq 4h: \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}_2(\mathbf{y}), \mathbf{y}(3h) = \mathbf{y}_3$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{y}_4 &\approx \mathbf{y}_3 - \mathbf{g}_{23} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{23} \mathbf{g}_{23} h^2 \\ &\quad \begin{aligned} &\quad \hookrightarrow = \frac{1}{2} D\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2 \\ &\quad \rightarrow = -\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + \dots) h \approx -\mathbf{g}_{20} h - D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2 \\ &\quad \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + \left(D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20} \right) h^2 \\ &\quad \approx \mathbf{y}_0 + \underbrace{(D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20})}_{\mathbf{g}^*} h^2 \end{aligned} \end{aligned}$$

$\mathbf{g}^* := [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ Lie-Klammer ergibt Lageänderung
--