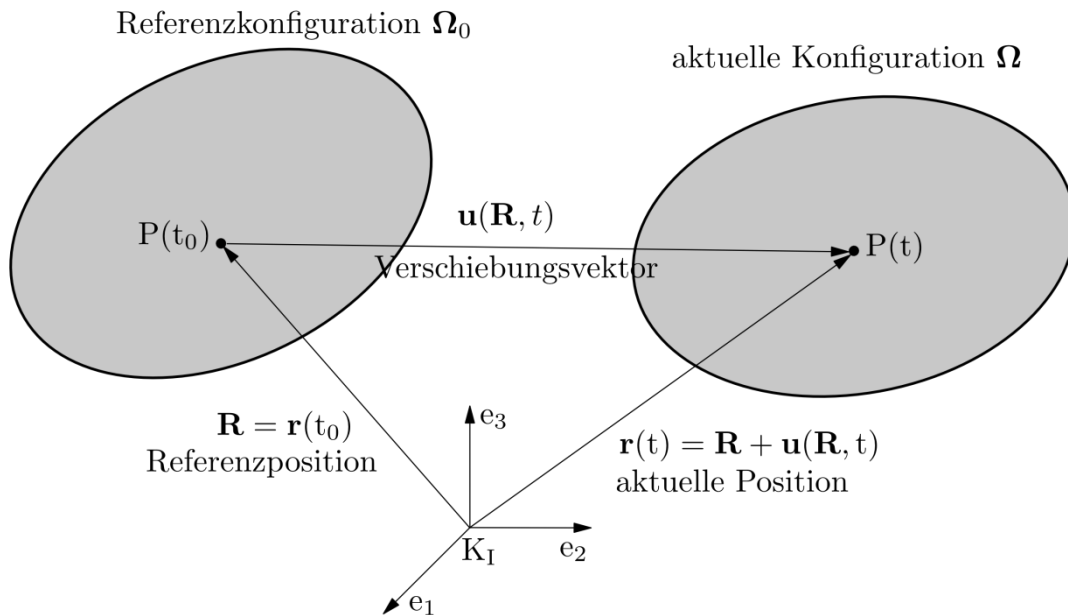


## Kontinuumsmechanische Grundlagen

### Kinematik

Die Bewegung eines Körpers  $K$  wird durch die Bewegung seiner materiellen Punkte  $P$  beschrieben.



Die Verschiebung  $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$  enthält Anteile aus der Starrkörperbewegung und der Verformung des Körpers.

Die Verformungen können mit dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor beschrieben werden:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{E}) \text{ mit } \mathbf{G} = \mathbf{G}^T$$

Deformationsgradient:  $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{R}_j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$

Verschiebungsgradient:  $\Delta \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{R}_j}$

Somit folgt

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{E} + \Delta \mathbf{F}$$

und es ergibt sich

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}^T + \Delta \mathbf{F}^T \Delta \mathbf{F}) \text{ bzw. } G_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial R_j} + \frac{\partial u_j}{\partial R_i} + \frac{\partial u_k}{\partial R_i} \frac{\partial u_k}{\partial R_j} \right).$$

Bei Annahme kleiner Verschiebungen  $\left| \frac{\partial u_i}{\partial R_j} \right| \ll 1$  können in  $\mathbf{G}$  die nichtlinearen Terme vernachlässigt werden. Des Weiteren sind die Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial R_j}$  und  $\frac{\partial}{\partial r_j}$  äquivalent.

Daraus folgt der lineare Verzerrungstensor  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right)$  mit  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T$ .



## Beziehungen zwischen Verzerrungen und Verschiebungen

Die unabhängigen Einträge des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\mathbf{G}$  und des linearisierten Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  lassen sich zusammenfassen:

$$\hat{\mathbf{G}} = [G_{11} \quad G_{22} \quad G_{33} \quad 2G_{12} \quad 2G_{23} \quad 2G_{13}]$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13}]$$

Definition von Differentialoperatoren mit  $\partial_i = \frac{\partial \dots}{\partial R_i}$

$$\mathbf{L}_L = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1 \partial_1 & \partial_1 u_2 \partial_1 & \partial_1 u_3 \partial_1 \\ \partial_2 u_1 \partial_2 & \partial_2 u_2 \partial_2 & \partial_2 u_3 \partial_2 \\ \partial_3 u_1 \partial_3 & \partial_3 u_2 \partial_3 & \partial_3 u_3 \partial_3 \\ \partial_1 u_1 \partial_2 + \partial_2 u_1 \partial_1 & \partial_1 u_2 \partial_2 + \partial_2 u_2 \partial_1 & \partial_1 u_3 \partial_2 + \partial_2 u_3 \partial_1 \\ \partial_2 u_1 \partial_3 + \partial_3 u_1 \partial_2 & \partial_2 u_2 \partial_3 + \partial_3 u_2 \partial_2 & \partial_2 u_3 \partial_3 + \partial_3 u_3 \partial_2 \\ \partial_3 u_1 \partial_1 + \partial_1 u_1 \partial_3 & \partial_3 u_2 \partial_1 + \partial_1 u_2 \partial_3 & \partial_3 u_3 \partial_1 + \partial_1 u_3 \partial_3 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich die Beziehung zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{L}_L \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$$

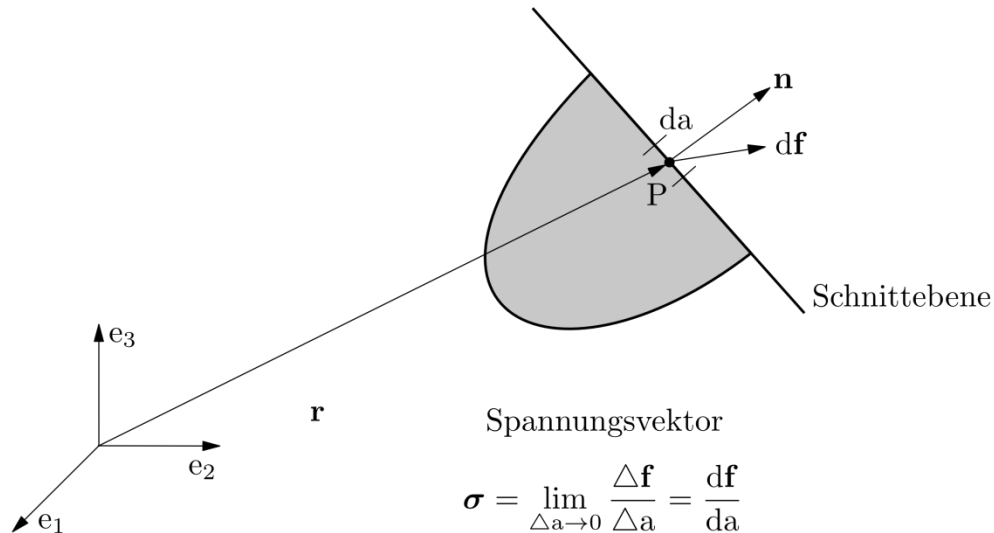
$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}_L \cdot \mathbf{u}$$

und den Verzerrungs- und Verschiebungsgeschwindigkeiten

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}} = \mathbf{L}_L \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{L}}_N(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{L}_L \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{L}_L \cdot \dot{\mathbf{u}}$$

## Spannungsmaße



Der Spannungsvektor hängt von der Orientierung  $\mathbf{n}$  der Schnittfläche ab.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

wobei  $\mathbf{T}$  den Cauchy Spannungstensor bezeichnet.

Oft ist die Betrachtung eines Elements  $dA$  und der Normalenrichtung  $\mathbf{N}$  in Referenzkonfiguration sinnvoll.

→ 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor

$$\mathbf{P}_1 = \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

→ 2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor (symmetrische Modifikation)

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_1 = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

Die Einträge des Spannungstensors lassen sich wiederum zusammenfassen zu

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = [P_{2,11} \quad P_{2,22} \quad P_{2,33} \quad P_{2,12} \quad P_{2,23} \quad P_{2,13}].$$



## Konstitutive Gleichungen

- beschreiben den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verformungszustand
- nur bestimmte Kombinationen aus Spannungs- und Verzerrungsmaßen sinnvoll

Für homogenes elastisches Materialverhalten kann mit dem Green-Lagrange Verzerrungstensor  $\mathbf{G}$  und dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor  $\mathbf{P}_2$  allgemein die konstitutive Gleichung  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2(\mathbf{G})$  formuliert werden.

Weitere Annahmen:

- isotropes Materialverhalten
- kleine Verzerrung (Linearisierung des Stoffgesetzes)

Es folgt das Stoffgesetz

$$\mathbf{P}_2 = 2\mu \mathbf{G} + \lambda \text{Spur}(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{C} : \mathbf{G},$$

mit den Lamé-Konstanten

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

und dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Poissonzahl  $\nu$ .

$\mathbf{C}$  ist ein Tensor vierter Stufe

$$C_{ijrs} = \lambda T_{ij} T_{rs} + \mu (T_{ir} T_{js} + T_{is} T_{jr}).$$

Das Stoffgesetz kann auch als  $\hat{\mathbf{P}}_2 = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{G}}$  geschrieben werden.

Dabei ist

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}.$$