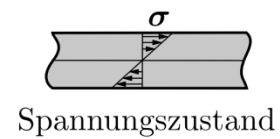
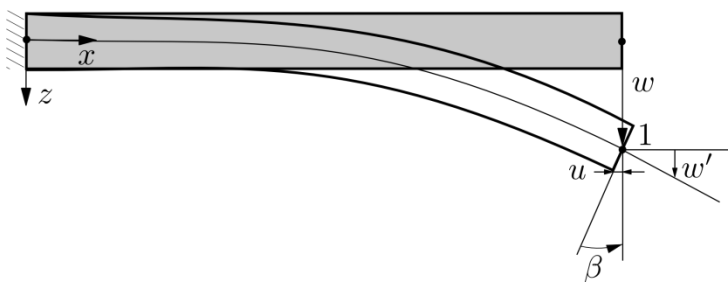


Finite Elemente: Schubstarres Balkenelement

Im Gegensatz zu Kontinuumselementen liegen bei so genannten Strukturelementen weitere Modellannahmen zu Grunde. Typische Beispiele sind hierbei Balken-, Platten- und Schalenelemente. Im Weiteren wird ein schubstarres Balkenelement betrachtet, welches auf der Euler-Bernoulli Balkentheorie beruht. Hierbei wird angenommen, dass die Querschnitte eben bleiben und senkrecht auf der Biegelinie stehen. Mit diesen Annahmen ergeben sich Elemente deren Knoten neben Verschiebungsfreiheitsgraden auch Rotationsfreiheitsgrade besitzen.



- Länge L
- Querschnittsfläche A
- Flächenträgheitsmoment I_y
- Durchbiegung $w(x)$

Annahmen und Beziehungen

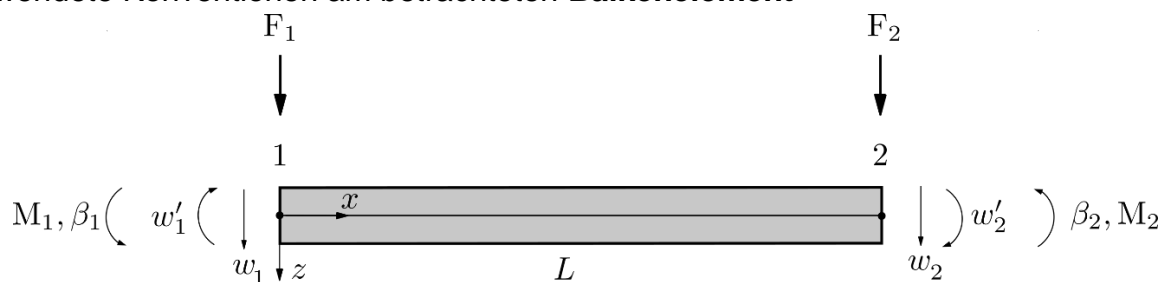
Neigung $w' = -\tan \beta$, für kleine β gilt $\tan \beta \approx \beta$ und somit $w' \approx -\beta$

Längsverschiebung $u = z \beta = -z w' = -z \frac{dw}{dx}$

Dehnung in x-Richtung $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} = -z w''$

Einachsiger **Spannungszustand** mit Hookschem Gesetz $\sigma_x = E \varepsilon_x = -E z w''$

Verwendete Konventionen am betrachteten **Balkenelement**





Das **D'Alembertsche Prinzip** für den betrachteten Euler-Bernoulli Balken lautet dann

$$\underbrace{\rho A \int_0^L \delta w \ddot{w} dx}_{\delta W_{m,t}} + \underbrace{\rho I_y \int_0^L \delta w' \ddot{w}' dx}_{\delta W_{m,r}} + \underbrace{EI_y \int_0^L \delta w'' w'' dx}_{\delta W_i} = \underbrace{\int_0^L \delta u s_z dx + F_1 \delta w_1 + F_2 \delta w_2 - M_1 \delta w'_1 - M_2 \delta w'_2}_{\delta W_e}$$

Hierbei ist z.B.

$$\delta W_i = \int_{\Omega_0} \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = \int_{\Omega_0} z^2 E \delta w'' w'' dV = E \int_A z^2 dA \int_0^L \delta w'' w'' dx = EI_y \int_0^L \delta w'' w'' dx$$

Ansatzfunktionen für Balkenelemente

Die Ansatzfunktionen für Balkenelemente in der FEM können aus der Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie gewonnen werden.

$$EI w^{IV} = 0$$

$$EI w''' = c_1$$

$$EI w'' = c_2 + c_1 x$$

$$EI w' = c_3 + c_2 x + \frac{1}{2} c_1 x^2$$

$$EI w = c_4 + c_3 x + \frac{1}{2} c_2 x^2 + \frac{1}{6} c_1 x^3$$

Über die Randbedingungen können die Integrationskonstanten c_1 bis c_4 bestimmt werden

$$\text{Knoten ①: } w(0) = \frac{1}{EI} c_4 = w_1 \quad \Rightarrow c_4 = EI w_1$$

$$w'(0) = \frac{1}{EI} c_3 = w'_1 = -\beta_1 \quad \Rightarrow c_3 = -EI \beta_1$$

$$\text{Knoten ②: } w(L) = w_1 - L\beta_1 + \frac{L^2}{2EI} c_2 + \frac{L^3}{6EI} c_1 = w_2$$

$$w'(L) = -\beta_1 + \frac{L}{EI} c_2 + \frac{L^2}{2EI} c_1 = w'_2 = -\beta_2$$



durch Umformungen folgen

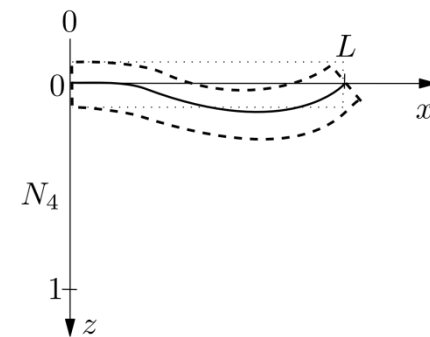
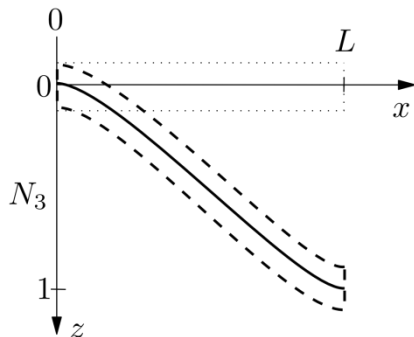
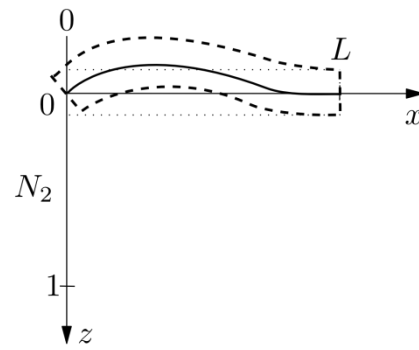
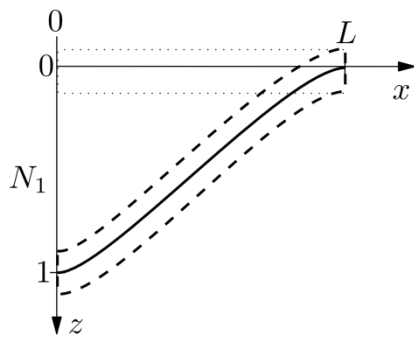
$$c_1 = \frac{6EI}{L^3} (2w_1 - 2w_2 - L\beta_1 - L\beta_2)$$

$$c_2 = \frac{2EI}{L^2} (-3w_1 + 3w_2 + 2L\beta_1 + L\beta_2)$$

Einsetzen der Integrationskonstanten in $w(x)$ und Umformen führt zu

$$w(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_1} w_1 + \underbrace{\left(-x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right)}_{N_2} \beta_1 + \underbrace{\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_3} w_2 + \underbrace{\left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right)}_{N_4} \beta_2$$

$$= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \beta_1 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}$$





Element-Massenmatrix (hier Vernachlässigung der rotatorischen Anteile)

Aus der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte folgt

$$\delta W_m = \rho A \int_0^L \delta w \ddot{w} dx = \rho A \int_0^L \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{N}^T \mathbf{N} \cdot \ddot{\mathbf{q}} dx = \delta \mathbf{q} \cdot \rho A \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}$$

und die Massenmatrix lautet somit

$$\mathbf{M} = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Element-Steifigkeitsmatrix

Aus der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte folgt mit $w'' = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}$

$$\delta W_i = EI_y \int_0^L \delta w'' w'' dx = EI_y \int_0^L \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} dx = \delta \mathbf{q} \cdot EI_y \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \cdot \mathbf{q} = \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}$$

Mit den hergeleiteten Ansatzfunktionen \mathbf{N} ist

$$\mathbf{B} = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & -\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} & -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} & -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4]$$

und die Steifigkeitsmatrix lautet somit

$$\mathbf{K} = EI_y \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = EI_y \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} dx = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$