Mögliche FE-Problemstellungen

Statik

Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{F} \qquad \mathbf{q} = \mathbb{R}^{\mathrm{f}}$$

f : Knotenfreiheitsgrade

→ Verschiebung, Dehnungen, Spannungen

Modalanalyse

Homogenes Problem $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0}$

Lösungsansatz: $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}, \ \ddot{\mathbf{q}} = -\hat{\mathbf{q}} \cdot \omega^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}$

→ Eigenwertproblem (EWP) $(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} = \mathbf{0}$

Hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn

$$\mathbf{det}(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) = \mathbf{0}.$$

→ $\omega_{\mathrm{i}}^2;\ \mathrm{i} = 1 \ldots \mathrm{f}$ ω_{i}^2: Eigenwerte
ω_{i}: Eigenkreisfrequenz

Zu ω_{i}^2 gehört jeweils ein Eigenvektor $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{i}}$. Diese $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{i}}$ werden in der FEM meistens normiert, dass mit $\mathbf{\Phi} = [\mathbf{\Phi}_1 \ldots \mathbf{\Phi}_{\mathrm{i}}]$ gilt

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Omega^2}; \quad \mathbf{\Omega^2} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_{\mathrm{f}}^2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des EWP folgt nicht über die Lösung des charakteristischen Polynoms sondern z.B. mit einer Vektoriteration.

Dynamikanalyse

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{q}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{q}_0\,, \qquad \dot{\mathbf{q}}(\mathrm{t}_0) = \dot{\mathbf{q}}_0$$

Lösen des Anfangswertproblems mit numerischen Verfahren. Bei der FEM kommen oft Newmark-Verfahren zum Einsatz. Im Gegensatz zu den bei MKS verwendeten Ein- und Mehrschrittverfahren erfolgt hier kein Übergang in den Zustandsraum.