



Kinetik eines freien elastischen Körpers

D'Alembertsche Prinzip in Referenzkonfiguration

$$\underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{a}_{IP} \cdot \delta \mathbf{r}_{IP} dV}_{\delta W_m} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \delta \hat{\mathbf{G}} dV}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_{\Gamma_{q_0}} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r}_{IP} dA}_{\delta W_p} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{r}_{IP} dV}_{\delta W_b} = 0$$

mit der virtuellen Verrückung $\delta \mathbf{r}_{IP} = \mathbf{T}_{RP}^t \cdot \delta \mathbf{z}_I$

Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\delta W_m = \left(\int_{\Omega_0} (\mathbf{T}_{RP}^t)^T \cdot \mathbf{T}_{RP}^t dm \cdot \mathbf{z}_{III} + \int_{\Omega_0} (\mathbf{T}_{RP}^t)^T \cdot \boldsymbol{\zeta}_{RP}^t dm \right) \cdot \delta \mathbf{z}_I = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_{III} + \mathbf{h}_\omega) \cdot \delta \mathbf{z}_I$$

Dabei ist $\rho_0 dV = dm$ berücksichtigt. Es ergeben sich hieraus die Massenmatrix $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$ und der Vektor der Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte \mathbf{h}_ω .

Massenmatrix:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T \\ \boldsymbol{\Phi}_P^T \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{E} \quad -\tilde{\mathbf{r}}_{RP} \quad \boldsymbol{\Phi}_P] dm = \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & m\tilde{\mathbf{c}}^T & \mathbf{C}_t^T \\ m\tilde{\mathbf{c}} & \mathbf{I} & \mathbf{C}_r^T \\ \mathbf{C}_t & \mathbf{C}_r & \mathbf{M}_e \end{bmatrix}$$

Masse des Körpers: $m\mathbf{E} = \int_{\Omega_0} \mathbf{E} dm$

Trägheitstensor: $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T dm$

Schwerpunktlage: $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{q}) = \frac{1}{m} \int_{\Omega_0} \mathbf{r}_{RP} dm$

Massenmatrix aus elastischem Anteil: $\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}_P^T \cdot \boldsymbol{\Phi}_P dm$

Kopplungsterme: $\mathbf{C}_t = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}_P^T dm$

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_r(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}_P^T \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T dm$$



Vektor der Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte

$$\mathbf{h}_\omega = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \\ \Phi_{\text{RP}}^{\text{T}} \end{bmatrix} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}) \, \text{d}m = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\omega\text{t}} \\ \mathbf{h}_{\omega\text{r}} \\ \mathbf{h}_{\omega\text{e}} \end{bmatrix}$$

Hierbei ist es sinnvoll die elastischen Anteile von der Referenzbewegung zu trennen.

translatorischer Anteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega\text{t}} &= \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \, \text{d}m \\ &= m \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{c} + 2m \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{c}} \end{aligned}$$

rotatorischer Anteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega\text{r}} &= - \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \, \text{d}m \\ &= \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} + 2 \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \, \text{d}m \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} + \mathbf{G}_r \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{G}_r = \mathbf{G}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 2 \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \, \text{d}m$$

Anteil aus elastischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega\text{e}} &= \int_{\Omega_0} \Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \, \text{d}m \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{O}_e^1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{O}_e^{n_q} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{G}_e = \mathbf{G}_e(\dot{\mathbf{q}}) = 2 \int_{\Omega_0} \Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \, \text{d}m$$

und $\mathbf{O}_e^k = \mathbf{O}_e^k(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\Phi}_{\text{P}}^{*k} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \, \text{d}m$, wobei $\tilde{\Phi}_{\text{P}}^{*k}$ die k-te Ansatzfunktion ist



Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

$$\delta W_e = \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \delta \hat{\mathbf{G}} dV = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \bar{\mathbf{K}}_e(\mathbf{q}_e) \mathbf{q}_e \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_e} \cdot \delta \mathbf{z}_I \quad \text{mit}$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{L}_L \Phi_P \cdot \mathbf{q}_e + \frac{1}{2} \mathbf{L}_N(\Phi_P \mathbf{q}_e) \Phi_P \cdot \mathbf{q}_e = \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{q}_e + \frac{1}{2} \mathbf{B}_N(\mathbf{q}_e) \cdot \mathbf{q}_e,$$

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}_L dV \quad \text{und}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_e(\mathbf{q}_e) = \int_{\Omega_0} \left(\mathbf{B}_N^T(\mathbf{q}_e) \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}_L + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N(\mathbf{q}_e))^T \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}_N(\mathbf{q}_e) \right) dV$$

Virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte

aus Oberflächenspannungen $\bar{\mathbf{p}}$

$$\delta W_p = \int_{\Gamma_{q_0}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \\ \Phi_P^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_p} \cdot \bar{\mathbf{p}} dA \cdot \delta \mathbf{z}_I$$

aus Einzelkräften/Momenten $\mathbf{f}_{P_k}, \mathbf{I}_{P_k}$ angreifend am Punkt P_k

$$\delta W_d = \sum_{k=1}^{n_k} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{RP_k} \\ \Phi_{P_k}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}_{P_k} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \\ \Psi_{P_k}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I}_{P_k} \right)}_{\mathbf{h}_d} \cdot \delta \mathbf{z}_I$$

Virtuelle Arbeit der Volumenkräfte

$$\delta W_b = \int_{\Omega_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \\ \Phi_P^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_b} \cdot \mathbf{b} dm \cdot \delta \mathbf{z}_I \quad \text{bei Gravitation } \mathbf{b} = \mathbf{S}_{IP}^T \cdot \mathbf{g}$$

Bewegungsgleichungen eines freien Körpers

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_{III} + \mathbf{h}_\omega + \mathbf{h}_e - \mathbf{h}_p - \mathbf{h}_d - \mathbf{h}_b) \cdot \delta \mathbf{z}_I = 0, \quad \forall \delta \mathbf{z}_I$$

$$\boxed{\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_{III} = \underbrace{-\mathbf{h}_\omega - \mathbf{h}_e + \mathbf{h}_p + \mathbf{h}_d + \mathbf{h}_b}_{\mathbf{h}_a}}$$