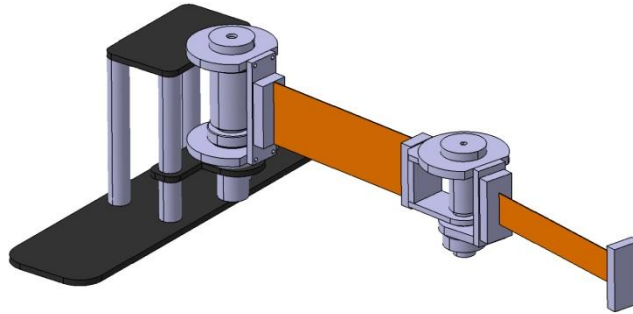


Regelung flexibler Mehrkörpersysteme

Geregelte flexible Mehrkörpersysteme sind typische unteraktuierte Mehrkörpersysteme, da weniger Stellgrößen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ als verallgemeinerte Koordinaten $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$ vorliegen ($m < f$). Im Allgemeinen haben bei flexiblen MKS die elastischen Koordinaten $\mathbf{y}_e \in \mathbb{R}^{f_e}$ keinen oder nur sehr wenige Stelleingriffe (z.B. durch Piezoaktuatoren).



Bewegungsgleichungen in partitionierter Form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{se} \\ \mathbf{M}_{se}^T & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_s \\ \ddot{\mathbf{y}}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_s \\ \mathbf{k}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_e \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

Verallgemeinerte Koordinaten: $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_e] \in \mathbb{R}^f$ mit $\mathbf{y}_s \in \mathbb{R}^{f_s}$ und $\mathbf{y}_e \in \mathbb{R}^{f_e}$

End-Effektor Position: $\mathbf{r}^{EF} = \mathbf{r}^{EF}(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_e)$ (2)

Sollbahn: \mathbf{r}_d^{EF} 2-mal stetig differenzierbar

Annahmen für weitere Betrachtung

- Es liegen so viele Stellgrößen wie Starrkörperfreiheitsgrade vor, d.h. $\mathbf{u}, \mathbf{y}_s, \mathbf{r}^{EF} \in \mathbb{R}^m$
- Die Stellgrößen \mathbf{u} wirken an den Gelenken (typischer elastischer Roboter)
- Das flexible MKS wird mit einem Tangentensystem modelliert, somit wird bei einem System in Baumstruktur $\mathbf{B}_s = \mathbf{E}$ und $\mathbf{B}_e = \mathbf{0}$.

Vorgehen: Reglerentwurf mit zwei Entwurfsfreiheitsgraden (Vorsteuerung+Regler)

- Vorsteuerung basierend auf starrem MKS führt zu inakzeptablen Schwingungen
- Beim Vorsteuerungsentwurf für flexible MKS müssen Inverse Kinematik und Inverse Dynamik im Allgemeinen gemeinsam betrachtet werden, da die nichtlineare Gleichung $\mathbf{r}^{EF}(\mathbf{y}_{s,d}, \mathbf{y}_{e,d}) = \mathbf{r}_d^{EF}$ einerseits unterbestimmt ist und andererseits die Lösung $\mathbf{y}_{s,d}, \mathbf{y}_{e,d}$ die Bewegungsgleichung (1) erfüllen muss.

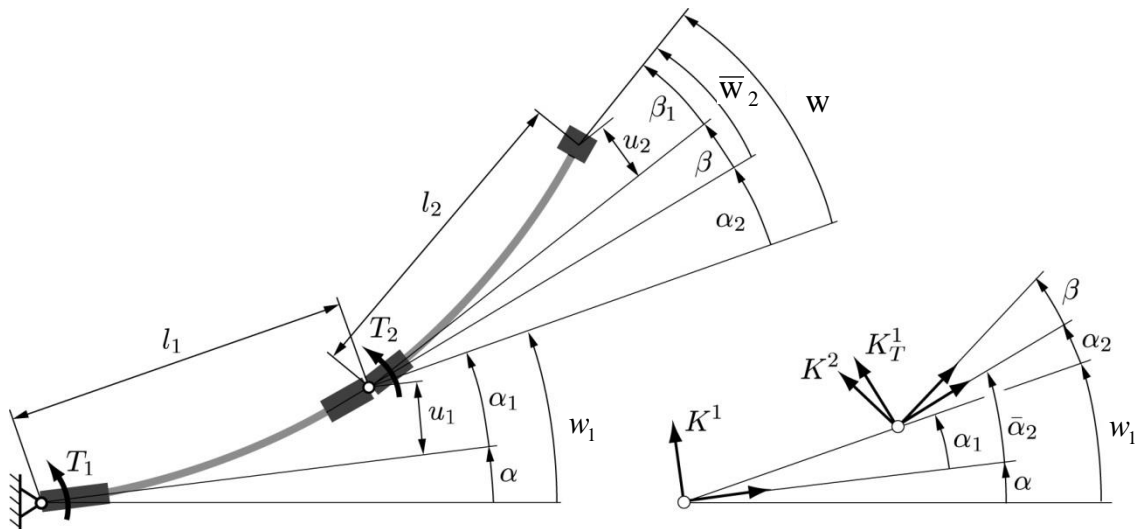
Vorsteuerungsentwurf durch exakte Modellinversion

Ein exaktes inverses Modell kann mit denselben differential-geometrischen Ansätzen wie die exakte Zustandslinearisierung erhalten werden. Hierzu wird die Bewegungsgleichung (1) zunächst mittels Koordinatentransformation in Koordinaten des Systemausgangs überführt. Hieraus lässt sich dann einfach ein inverses Modell ableiten.

1. Definition eines geeigneten Systemausgangs

Zur Vereinfachung der Koordinatentransformation bietet sich bei elastischen Robotern oft an einen neuen linear kombinierten Systemausgang $\mathbf{w} = \mathbf{y}_s + \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{y}_e$ mit konstanter Gewichtungsmatrix $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{m \times f_e}$ zu definieren. Dieser neue Systemausgang kann als Hilfswinkel aufgefasst werden.

Beispiel: elastischer 2-Arm Roboter



$$\mathbf{r}^{\text{ef}}(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_e) \approx \bar{\mathbf{r}}^{\text{ef}}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(w_1) + l_2 \cos(w_1 + w_2) \\ l_1 \sin(w_1) + l_2 \sin(w_1 + w_2) \end{bmatrix} \quad (3)$$



2. Koordinatentransformation

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ mit } \mathbf{x} = [\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_s, \dot{\mathbf{y}}_e]^T \quad \mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) \text{ mit } \mathbf{z} = [\mathbf{w}, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{y}}_e]^T$$

Zur Koordinatentransformation müssen in der Bewegungsgleichung (1) die Starrkörperkoordinaten ersetzt werden, d.h. $\mathbf{y}_s = \mathbf{w} - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{y}_e$, $\dot{\mathbf{y}} = {}_s\dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e$ und $\ddot{\mathbf{y}} = {}_s\ddot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_e$. Nach Umformung ergibt sich die Bewegungsgleichung in neuen Koordinaten:

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{u} \quad (4)$$

$$(\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_e = \mathbf{q}_e - \mathbf{k}_e - \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e - \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{u}) \quad (5)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{ss} - (\mathbf{M}_{se} - \mathbf{M}_{ss} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot (\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \cdot \mathbf{M}_{se}^T$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_s - (\mathbf{M}_{se} - \mathbf{M}_{ss} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot (\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \cdot \mathbf{q}_e$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}_s - (\mathbf{M}_{se} - \mathbf{M}_{ss} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot (\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \cdot (\mathbf{k}_e + \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e + \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e)$$

3. Inverses Modell

Die Bewegungsgleichungen (4-5) sind nun geeignet, um ein inverses Modell herzuleiten. Die Solltrajektorien des neuen Ausgangs $\mathbf{w}_d, \dot{\mathbf{w}}_d$ können mit (3) mittels einer inversen Kinematik bestimmt werden.

Die benötigten Stellkräfte folgen dann aus (4)

$$\mathbf{u}_d = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{w}_d, \mathbf{y}_e) \cdot \ddot{\mathbf{w}}_d + \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{w}_d, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{w}}_d, \dot{\mathbf{y}}_e) - \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{w}_d, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{w}}_d, \dot{\mathbf{y}}_e) \quad (6)$$

Hierbei sind die Trajektorien der elastischen Koordinaten $\mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_e$ unbekannt. Mit (5) unter Verwendung von (6) folgt hierfür die Differentialgleichung

$$(\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_e = \mathbf{q}_e - \mathbf{k}_e - \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e - \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \ddot{\mathbf{w}}_d \quad (7)$$

Simulationsergebnisse

Trajektorienfehler für elastischen 2-arm Roboter

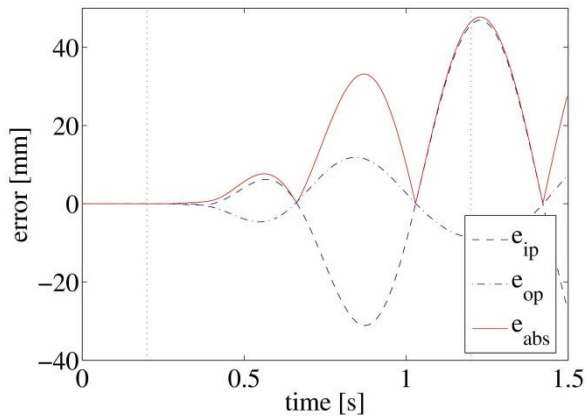


Bild 1: Vorsteuerung basierend auf starrem Modell

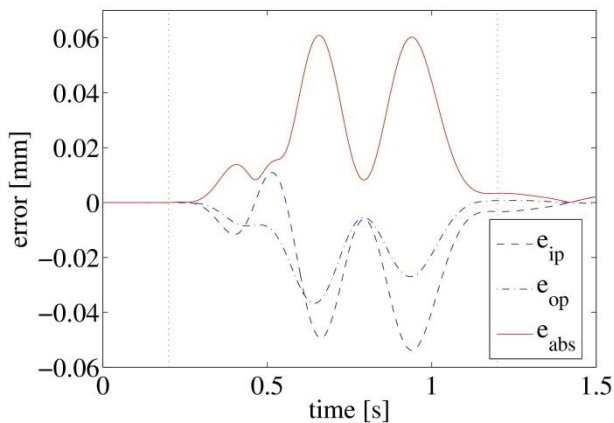


Bild 2: Exakt inverses Modell (instabile interne Dynamik, lösen eines Randwertproblems notwendig)

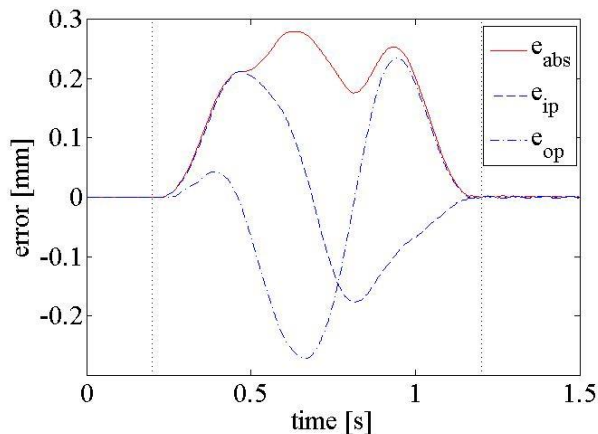


Bild 3: Optimiertes inverses Modell (stabile interne Dynamik, lösen durch Zeitintegration möglich)

Literatur

- [1] Burkhardt, M. Model-Based Feed-Forward Control for Mechatronic Systems with Structural Elasticity Shaker Verlag, 2019.