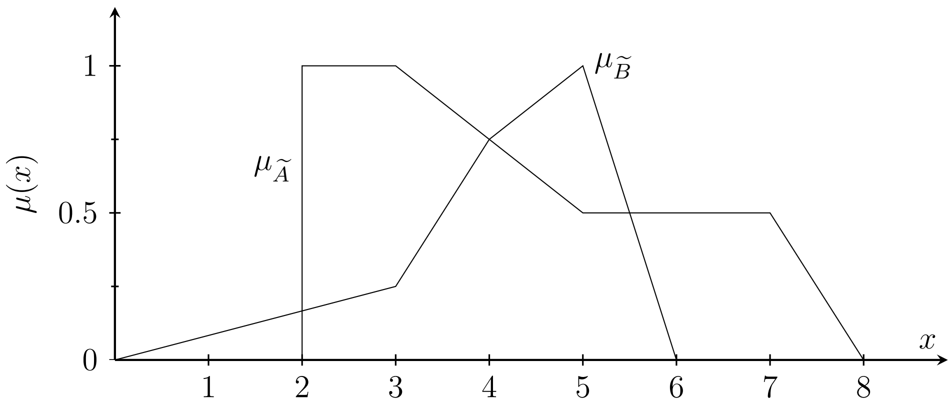
Übungen Fuzzy-Methoden

Aufgabe 1:

Zwei Fuzzy-Mengen $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$ sind gegeben durch die dargestellten Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\widetilde{A}}$ und $\mu_{\widetilde{B}}$



a) Kennzeichnen Sie in der Skizze jeweils für $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$ den Kern, den Träger, die Höhe und die (strengen) Alphaschnitte für $\alpha = 0.5$.

Bestimmen Sie zeichnerisch

b) die Komplemente $\widetilde{A}^{\mathrm{c}}$ und $\widetilde{B}^{\mathrm{c}}$ der Mengen $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$

sowie den Durchschnitt $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ und die Vereingigung $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ vermittelt durch die folgenden t- und s-Normen:

c) Drastisches Produkt und drastische Summe,

d) Beschränktes Produkt und beschränkte Summe,

e) Algebraisches Produkt und algebraische Summe,

f) Minimum und Maximum.

Aufgabe 2:

Gegeben sind die unscharfen Relationen $\widetilde{R}$, $\widetilde{S}$ und $\widetilde{T}$ durch

$\widetilde{R}$:

x \ y	1	2	3
1	1.0	0.4	0.0
2	0.4	0.8	0.6
3	0.0	0.4	0.8

$\widetilde{S}$:

x \ y	1	2	3
1	0.1	0.3	0.6
2	0.2	0.6	0.5
3	0.6	1.0	0.7

$\widetilde{T}$:

y \ z	1	2	3
1	0.0	0.2	0.4
2	0.1	0.4	0.8
3	1.0	0.6	0.8

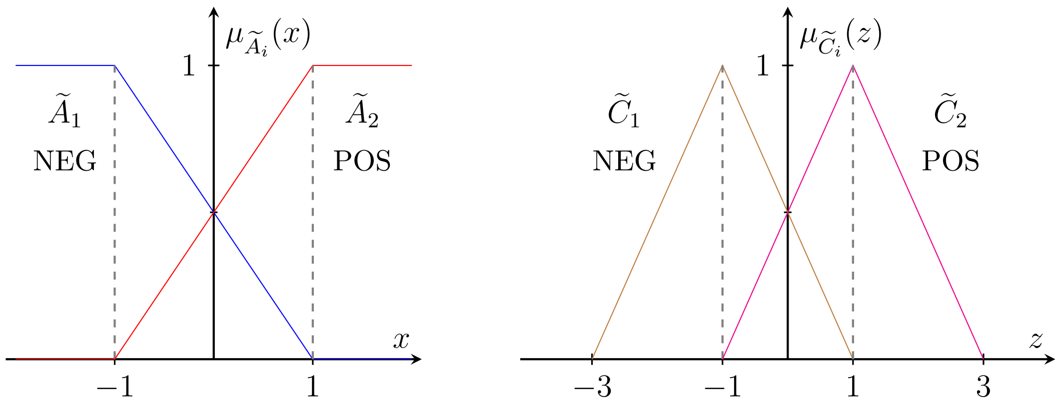
Berechnen Sie die Verkettungsergebnisse

$$\widetilde{U} = \widetilde{R} \circ_{\mathrm{MM}} \widetilde{T} \,, \quad \widetilde{V} = \widetilde{R} \circ_{\mathrm{MP}} \widetilde{T} \quad \text{und} \quad \widetilde{W} = (\widetilde{R} \cup \widetilde{S}) \circ_{\mathrm{MM}} \widetilde{T} \,.$$

Aufgabe 3:

Gegeben ist ein Fuzzy-System mit der Eingangsgröße x und der Ausgangsgröße z.

Über dem Wertebereich von x sind die Fuzzy-Mengen $\widetilde{A}_1$ („NEG“) und $\widetilde{A}_2$ („POS“) definiert. Die Fuzzy-Mengen über dem Wertebereich von z sind durch $\widetilde{C}_1$ („NEG“) und $\widetilde{C}_2$ („POS“) gegeben.
Die entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen können den nachstehenden Abbildungen entnommen werden.



Die Regelbasis des Systems ist in verbaler Darstellung durch die folgenden zwei Regeln gegeben:

1. WENN $x =$ NEG DANN $z =$ POS ,
2. WENN $x =$ POS DANN $z =$ NEG .

a) Geben Sie die Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\widetilde{A}_1}(x)$ und $\mu_{\widetilde{A}_2}(x)$ an.

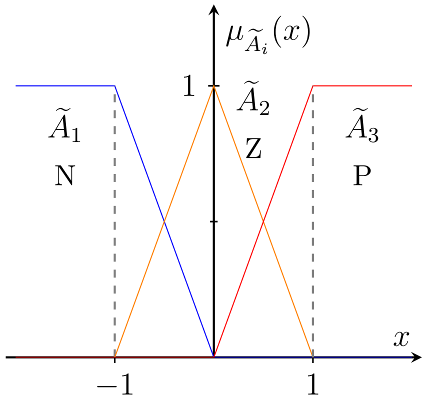
b) Berechnen Sie die Übertragungskennlinie $z(x)$ des Fuzzy-Systems.
Führen Sie dabei die Implikation nach MAMDANI aus und verwenden Sie für die Akkumulation den Maximum-Operator. Die Defuzzifizierung soll mit Hilfe der Schwerpunktsmethode durchgeführt werden.

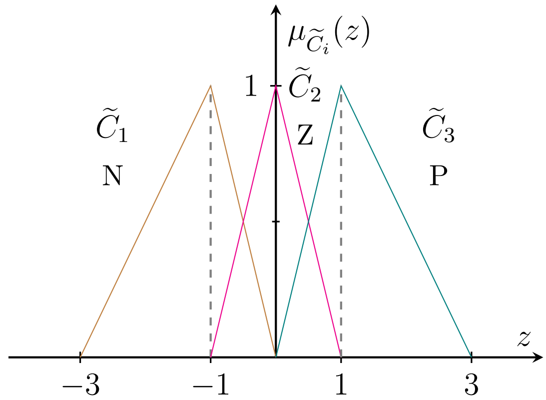
c) Welches Ergebnis erhält man für $z(x)$, wenn in b) die Defuzzifizierung statt mit der Schwerpunktsmethode mit Hilfe der Höhenmethode durchgeführt wird.

Aufgabe 4:

Gegeben ist ein Fuzzy-System mit der Eingangsgröße x und der Ausgangsgröße z.

Über dem Wertebereich von x sind die Fuzzy-Mengen $\widetilde{A}_1$ („N“), $\widetilde{A}_2$ („Z“) und $\widetilde{A}_3$ („P“) zusammen mit ihren linguistischen Werten definiert. Die Fuzzy-Mengen und linguistischen Werte über dem Wertebereich von z sind durch $\widetilde{C}_1$ („N“), $\widetilde{C}_2$ („Z“) und $\widetilde{C}_3$ („P“) gegeben.
Die entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen können den nachstehenden Abbildungen entnommen werden.





Die Regelbasis des Systems ist in verbaler Darstellung durch die folgenden drei Regeln gegeben:

1. WENN $x = \mathrm{N}$ DANN $z = \mathrm{N}$,
2. WENN $x = \mathrm{Z}$ DANN $z = \mathrm{Z}$,
3. WENN $x = \mathrm{P}$ DANN $z = \mathrm{P}$.

a) Geben Sie die Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\widetilde{A}_1}(x)$, $\mu_{\widetilde{A}_2}(x)$ und $\mu_{\widetilde{A}_3}(x)$ an.

b) Berechnen Sie die Übertragungskennlinie $z(x)$ des Fuzzy-Systems für den Eingangsgrößenbereich $0 < x < 1$.
Führen Sie dabei die Implikation nach Larsen aus und verwenden Sie für die Akkumulation den Maximum-Operator. Die Defuzzifizierung soll mit Hilfe der Schwerpunktsmethode durchgeführt werden.

c) Welches Ergebnis erhält man für $z(x)$, wenn in b) die Defuzzifizierung statt mit der Schwerpunktsmethode mit Hilfe der Höhenmethode durchgeführt wird.

Das System wird nun um einen Eingang y erweitert. Die Fuzzy-Mengen seien entsprechend zum Eingang x als $\widetilde{B}_1$ („N“), $\widetilde{B}_2$ („Z“) und $\widetilde{B}_3$ („P“) festgelegt, wobei $\mu_{\widetilde{B}_i}(y) = \mu_{\widetilde{A}_i}(x)$, $i = 1, 2, 3$ gelten soll. Die Regelbasis lautet nun in reduzierter Matrixform:

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie die Ausgangswerte $z(-0.5, 0.8)$ und $z(2, 0.25)$. Führen Sie dazu die Aggregation sowohl mit Minimum als auch algebraischem Produkt aus. Zur Defuzzifizierung soll die *Mean-of-Maxima* Methode verwendet werden.

Aufgabe 5:

Gegeben ist ein spezielles Takagi-Sugeno-Fuzzy-System (Eingangsgrößen x und y, Ausgangsgröße z) mit von den Eingangsgrößen abhängigen Fuzzy Singletons $z = c_i(x, y)$ im DANN-Teil der Regeln. Über dem Wertebereich von x sind die Fuzzy-Mengen $\widetilde{A}_1$ und $\widetilde{A}_2$ mit den linguistischen Werten „NEG“ und „POS“ definiert und über dem Wertebereich von y die Fuzzy-Mengen $\widetilde{B}_1$ und $\widetilde{B}_2$ mit ebenfalls den linguistischen Werten „NEG“ und „POS“. Die entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen sind gegeben durch

$$\mu_{\widetilde{A}_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2}(1-x) & \text{für} \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{„NEG“},$$

$$\mu_{\widetilde{A}_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2}(1+x) & \text{für} \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{„POS“},$$

$$\mu_{\widetilde{B}_1}(y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad y < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-\sin(y\pi)) & \text{für} \quad -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für} \quad y > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{„NEG“},$$

$$\mu_{\widetilde{B}_2}(y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad y < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1+\sin(y\pi)) & \text{für} \quad -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für} \quad y > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{„POS“}.$$

Die Regelbasis des Systems ist in zeilenweiser Form durch die folgenden vier Regeln gegeben:

1. WENN $x =$ NEG UND $y =$ NEG DANN $z = c_1(x, y) = 1 + 8x + 4y$,
2. WENN $x =$ NEG UND $y =$ POS DANN $z = c_2(x, y) = 1 + 2x - 4y$,
3. WENN $x =$ POS UND $y =$ NEG DANN $z = c_3(x, y) = 1 - 8x + 4y$,
4. WENN $x =$ POS UND $y =$ POS DANN $z = c_4(x, y) = 1 - 4x - 4y$.

Im Weiteren soll für die Eingangsgrößenwerte x und y Folgendes gelten:
x und y sind fest mit $\underline{x = x^* = 1/2}$ und $\underline{y = y^* = 0}$.

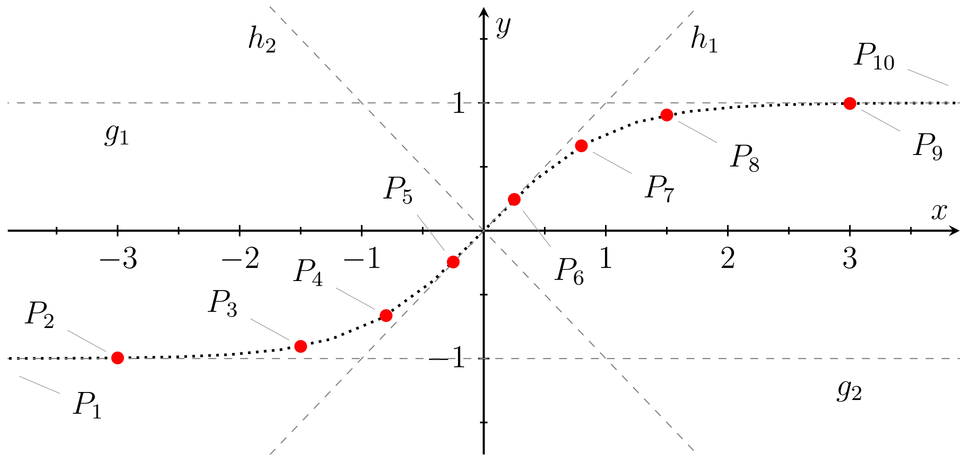
a) Bestimmen Sie die Erfülltheitsgrade $\nu_1 = \nu_1(x^*, y^*)$ bis $\nu_4 = \nu_4(x^*, y^*)$ der Regeln 1 bis 4. Benutzen Sie dabei als Aggregationsoperator die folgende t-Norm, welche für zwei Argumente μ_1 und μ_2 mit $0 \le \mu_i \le 1$, i = 1,2, definiert ist durch

$$t(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\max(\mu_1, \mu_2, \frac{1}{2})} \tag{0.1}$$

b) Berechnen Sie den Ausgangsgrößenwert $z* = z(x^*, y^*)$ des Fuzzy- Systems unter Verwendung der för die Takagi-Sugeno-Fuzzy-Systeme üblichen gewichteten Mittelwertbildung für Fuzzy-Singletons (vergleichbar der reduzierten Höhenmethode).

Aufgabe 6:

Gegeben sind die folgenden Punkte $P_i(x_i|y_i)$ eines unbekannten funktionalen Zusammenhangs $y = f(x)$:



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-5.00	-3.00	-1.50	-0.80	-0.25	0.25	0.80	1.50	3.00	5.00
y_i	-1.00	-1.00	-0.91	-0.66	-0.24	0.24	0.66	0.91	1.00	1.00

Die Funktion $f : x \mapsto y$ soll durch ein Takagi-Sugeno-System approximiert werden.

a) Bestimmen Sie an den gegebenen Punkten die Werte der Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_1(x)$ und $\mu_2(x)$ zu den Prämissen der jeweils zwei Regeln für die Funktionalsysteme $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$

$\mathcal{G}$: $g_1(x) = 1$ und $g_2(x) = -1$,

$\mathcal{H}$: $h_1(x) = x$ und $h_2(x) = -x$.

Für die Zugehörigkeitsfunktionen soll zusätzlich die Bedingung $\mu_1(x) + \mu_2(x) = 1$ gelten.

b) Berechnen Sie für beide Systeme den Ausgang y für $x = 0$ und $x = 0.5$ Systeme durch lineare Interpolation der berechneten Stützstellen und vergleichen Sie das Ergebnis mit den tatsächlichen Werten $f(0) = 0$ und $f(0.5) = 0.46$.

Was lässt sich über die lokale Approximationseigenschaft der Funktionalsysteme aussagen?

Aufgabe 7:

Über der Grundmenge $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ sind durch die Zugehörigkeitsfunktionen

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \frac{1}{x+3} \quad \text{und} \quad \mu_{\widetilde{B}}(x) = \frac{|x|}{2\,(x+3)}\,, \qquad x \in \Omega\,,$$

zwei diskrete unscharfe Mengen $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$ erklärt.
Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ die unscharfen Mengen $f(\widetilde{A})$ und $f(\widetilde{B})$ nach dem Erweiterungsprinzip.

Aufgabe 8:

Gegeben sind die diskreten unscharfen Mengen

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \{(0, 0.1), (1, 0.4), (2, 1.0), (3, 0.3), (4, 0.2)\}\,, \\ \widetilde{B} &= \{(1, 0.2), (2, 0.6), (3, 1.0), (4, 0.5), (6, 0.1)\}\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Ergebnisse von $f(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ und $g(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ mit Hilfe des Erweiterungsprinzips für die Funktionen $f(x, y) = x \cdot y$ und $g(x, y) = \frac{x}{y} + 1$.

Aufgabe 9:

Gegeben sind die Zugehörigkeitsfunktionen zu den (kontinuierlichen) Fuzzy-Zahlen $\widetilde{\chi}$, $\widetilde{\psi}$ und $\widetilde{\omega}$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch

$$\mu_{\widetilde{\chi}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{9}(x-2)^2 & \text{für} \quad x \in [-1, 2], \\ 1 - (x-2)^2 & \text{für} \quad x \in (2, 3], \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\mu_{\widetilde{\psi}}(y) = \begin{cases} \frac{y-a}{b-a} & \text{für} \quad y \in [a, b], \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases} \qquad \mu_{\widetilde{\omega}}(z) = \begin{cases} \frac{d-z}{d-c} & \text{für} \quad z \in [c, d], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie die α-Schnitte $M_\alpha^v = \{\xi \mid \xi \in \mathbb{R} \ \wedge \ \mu_v(\xi) \geq \alpha\}$ für $v \in \{\widetilde{\chi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\omega}\}$ und ein beliebiges $\alpha \in [0, 1]$ an.

b) Berechnen Sie die Fuzzy-Zahlen $\widetilde{\rho} = f(\widetilde{\chi})$, $\widetilde{\sigma} = g(\widetilde{\chi})$ und $\widetilde{\tau} = h(\widetilde{\psi}, \widetilde{\omega})$ auf Basis des Erweiterungsprinzips. Bestimmen Sie dazu die Zugehörigkeitsfuntionen $\mu_{\widetilde{\rho}}(r)$, $\mu_{\widetilde{\sigma}}(s)$ und $\mu_{\widetilde{\tau}}(t)$ sowie die α-Schnitte $M_\alpha^{\widetilde{\rho}}$, $M_\alpha^{\widetilde{\sigma}}$ und $M_\alpha^{\widetilde{\tau}}$ mit den wie folgt definierten Funktionen:

$$\begin{aligned} f: &\quad x \mapsto x^2 + 1\,, \\ g: &\quad x \mapsto \frac{1}{x}\,, \\ h: &\quad (y, z) \mapsto y + z\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 10:

Gegeben ist das dynamische System

$$\frac{\mathrm{d}\,\widetilde{y}(t)}{\mathrm{d}t} = (-2\widetilde{a}t + \widetilde{b})\,\widetilde{y}(t)$$

mit der Anfangsbedingung $\widetilde{y}(t\!=\!0) = \widetilde{y}_0$.

Bestimmen Sie die Systemantwort nach dem Erweiterungsprinzip

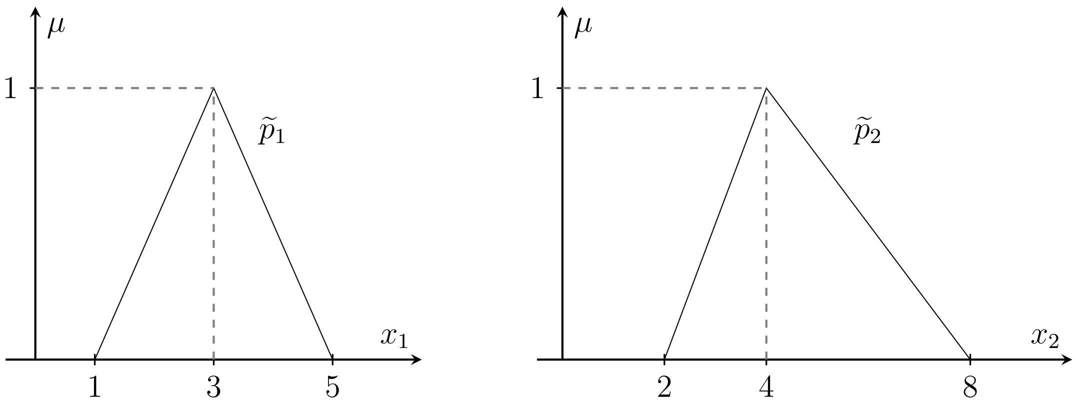
a) für die fuzzy-wertige Anfangsbedingung $\widetilde{y}_0 = \mathrm{tfn}(1, \frac{1}{2}, 1)$, den fuzzy-wertigen Parameter $\widetilde{b} = \mathrm{tfn}(1, 0, 1)$ und den scharfen Parameter $\widetilde{a} = 1$;

b) für das fuzzy-parametrierte System mit $\widetilde{a} = \mathrm{tfn}(1, \frac{1}{2}, 1)$, $\widetilde{b} = \mathrm{tfn}(1, 0, 1)$ und die scharfe Anfangsbedingung $\widetilde{y}_0 = 1$.

Skizzieren Sie Extremwerte der fuzzy-wertigen Lösung für $\mu_{\widetilde{y}} = 1$ und $\mu_{\widetilde{y}} = 0$.

Aufgabe 11:

Gegeben sind zwei unabhängige (kontinuierliche) Fuzzy-Zahlen $\widetilde{p}_1$ und $\widetilde{p}_2$ mit linearen (dreiecksförmigen) Zugehörigkeitsfunktionen gemäß den nachstehenden Abbildungen.



a) Zerlegen Sie die Fuzzy-Zahlen $\widetilde{p}_1$ und $\widetilde{p}_2$ in Intervallmengen P_1 und P_2 der Form

$$P_i = \left\{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \ldots, X_i^{(m)}\right\} = \left\{[a_i^{(0)}, b_i^{(0)}], [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}], \ldots, [a_i^{(m)}, b_i^{(m)}]\right\}$$

und legen Sie dabei die Diskretisierungsanzahl $m = 4$ zugrunde.

b) Berechnen Sie unter Verwendung der klassischen Fuzzy-Arithmetik (auf der Grundlage der Intervallarithmetik) die Fuzzy-Zahl

$$\widetilde{q} = \widetilde{q}\,(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2) = \frac{(\widetilde{p}_2 - \widetilde{p}_1)^2}{\widetilde{p}_1}$$

(durch „direkte Auswertung“) und geben Sie das Ergebnis als zerlegte Fuzzy-Zahl in Form der Intervallmenge

$$Q_{\mathrm{I}} = \left\{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \ldots, Z^{(m)}\right\}$$

an.

c) Berechnen Sie die Fuzzy-Zahl $\widetilde{q}$ aus b) unter Verwendung der (reduzierten) Transformationsmethode und geben Sie das Ergebnis als zerlegte Fuzzy-Zahl in Form der Intervallmenge

$$Q_\mathrm{T} = \left\{ Z^{(0)}, Z^{(1)}, \ldots, Z^{(m)} \right\}$$

an.

Aufgabe 12:

Gegeben ist die Punktmenge

$$M = \{-1, 0, 2\},$$

eines eindimensionalen Merkmalraums deren Zuordnung zu zwei Gruppen mit Hilfe der Fuzzy-c-Means Methode erfolgen sollen.

Die Clusterzentren v_1 und v_2, die zur Zuordnung der Daten herangezogen werden, liegen zu Beginn bei $v_{10} = 0$ und $v_{20} = 1$. Der Unschärfeexponent wird auf $\gamma = 2$ festgelegt.

Führen Sie die erste Iteration des FCM-Algorithmus durch, bestimmen Sie dazu die entsprechenden Abstände, die Zugehörigkeiten der Datenpunkte zu den beiden Clustern und ermitteln Sie anschließend die Clusterzentren für den nächsten Iterationsschritt.

Aufgabe 13:

Zu den Datenvektoren $\underline{x}_i = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, 3, 4$ mit $\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$, $\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10^3 \end{bmatrix}$, $\underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$ und $\underline{x}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$ sollen Abstände von dem Clusterzentrum $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit verschiedenen Abstandsmaßen berechnet werden.

Benutzen Sie dazu eine Transformation $\underline{z}_i = \underline{\underline{B}}\,[\underline{x}_i + \underline{t}]$, sodass die quadratische Norm $\left\| \underline{z}_j - \underline{w} \right\|_A^2$ der gewichteten Distanz $[\underline{x}_i - \underline{v}]^\mathsf{T} \underline{\underline{A}} [\underline{x}_i - \underline{v}]$ mit $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}^\mathsf{T} \underline{\underline{B}}$ entspricht, wobei $\underline{w}$ das ebenfalls transformierte Clusterzentrum darstellt. Bestimmen Sie die Transformationsbeziehung, das Abstandsmaß und die Abstände für

a) die euklidische Distanz mit $\underline{z}_i = \underline{x}_i$;

b) die (statistische) Standardisierung, wobei gilt

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\xi^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_\eta^2} \end{bmatrix}, \qquad \underline{t} = -\begin{bmatrix} m_\xi \\ m_\eta \end{bmatrix}$$

mit den Mittelwerten m_ξ und m_η, und den Varianzen σ_ξ^2 und σ_η^2 der Daten.

Welche Auswirkung hat die Standardisierung auf das Ergebnis?