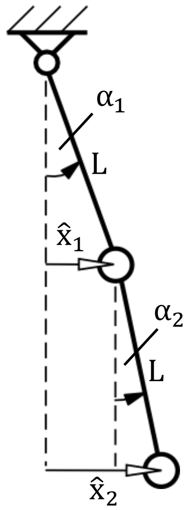
Fundamentalmatrix des Doppelpendels

Aufgabe 1

Die linearisierten Zustandsgleichungen eines vereinfachten Doppelpendels (siehe auch A14) lauten für $\frac{g}{L} = 1$ und mit $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$,



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \\ \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\,, \quad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \hline -\boldsymbol{\varkappa} & \mathbf{0} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{\varkappa} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Wie lautet die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}\,t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3 t^3 + \cdots$$

bei einer Reihenentwicklung bis zum Glied dritter Ordnung?

☐ $$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{t}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}\,t^2 & -\mathbf{E}\,t + \frac{1}{6}\boldsymbol{\varkappa}\,t^3 \\ \hline \boldsymbol{\varkappa}\,t + \frac{1}{6}\boldsymbol{\varkappa}^2\,t^3 & \mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}\,t^2 \end{array}\right]$$

☐ $$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{t}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}\,t^2 & \mathbf{E}\,t - \frac{1}{6}\boldsymbol{\varkappa}\,t^3 \\ \hline -\boldsymbol{\varkappa}\,t + \frac{1}{6}\boldsymbol{\varkappa}^2\,t^3 & \mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}\,t^2 \end{array}\right]$$

b). Führen Sie die Berechnung der Fundamentalmatrix bis zu Gliedern 3. Ordnung aus.

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{t}) = \left[\begin{array}{c|c} \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \end{array}\right]$$

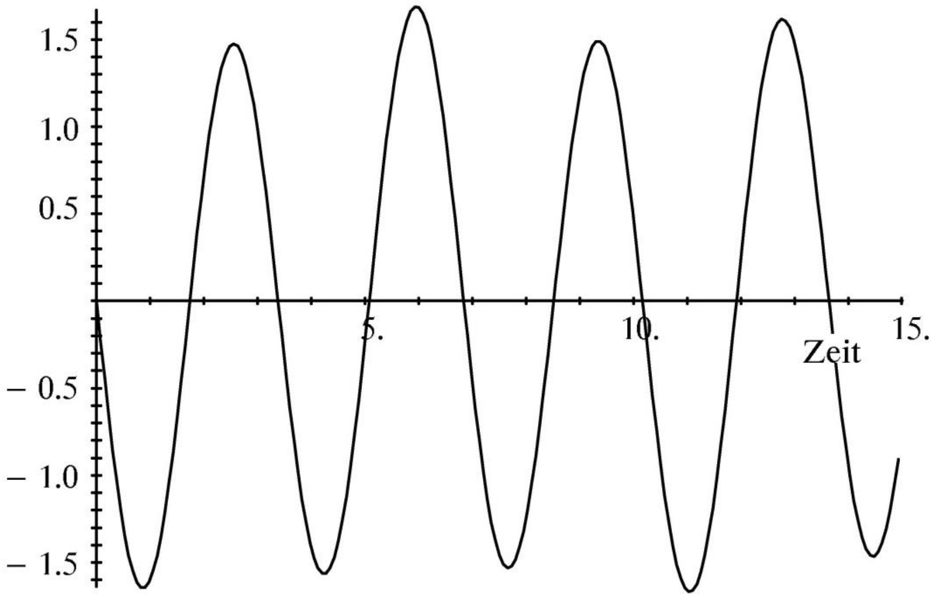
c). Welche Form hat die allgemeine Lösung zu Beginn der Bewegung, $t \ll 1$, für die Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$?

☐ $$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2}\,t^2 \\ \frac{1}{2}\,t^2 \\ -t - \frac{1}{2}\,t^3 \\ -\frac{1}{6}\,t^3 \end{bmatrix}$$

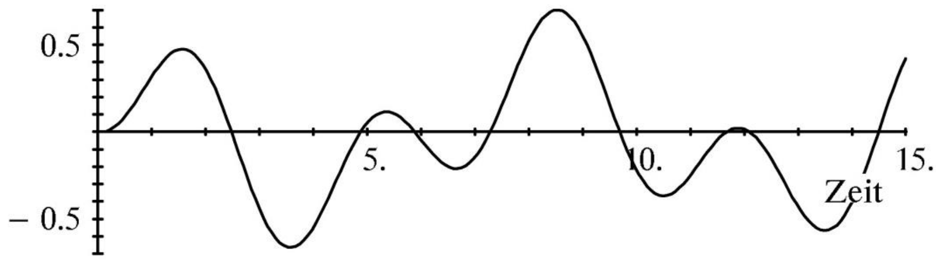
☐ $$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2}\,t^2 \\ \frac{1}{2}\,t^2 \\ -3t + \frac{5}{3}\,t^3 \\ t - \frac{2}{3}\,t^3 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Frage b).

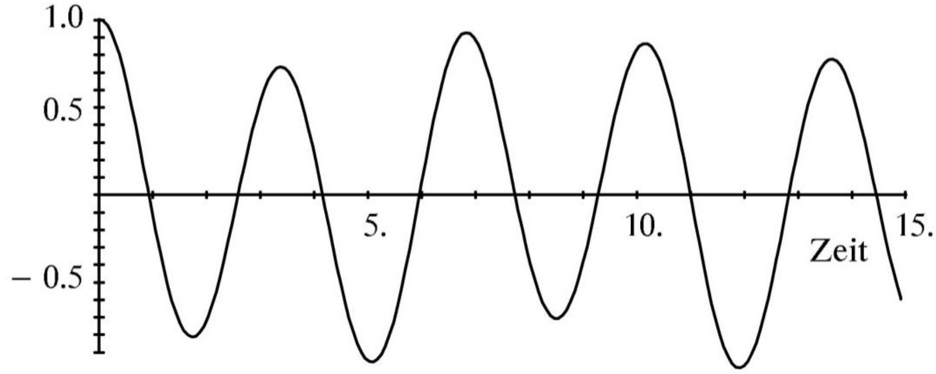
d) Durch numerische Integration mit dem Computer findet man folgende Lösungskurven. Ordnen Sie diese mit Hilfe des Ergebnisses von Frage c) den Zustandsgrößen zu.



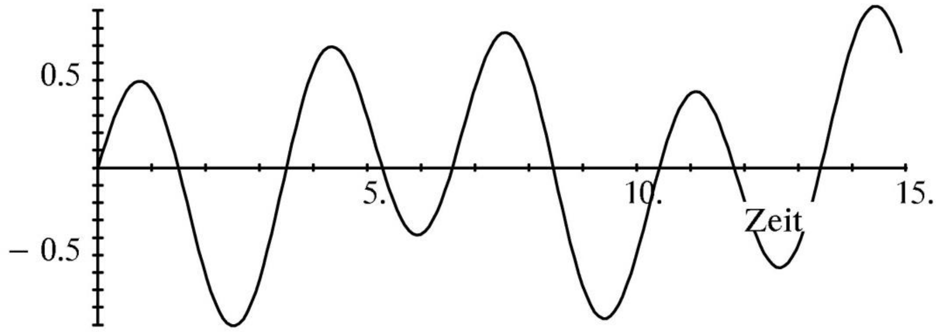
- ☐ $x_1(t)$
- ☐ $x_2(t)$
- ☐ $x_3(t)$
- ☐ $x_4(t)$



- ☐ $x_1(t)$
- ☐ $x_2(t)$
- ☐ $x_3(t)$
- ☐ $x_4(t)$



- ☐ $x_1(t)$
- ☐ $x_2(t)$
- ☐ $x_3(t)$
- ☐ $x_4(t)$



- ☐ $x_1(t)$
- ☐ $x_2(t)$
- ☐ $x_3(t)$
- ☐ $x_4(t)$